

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI  
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

МЕХАНИКА  
МУАММОЛАРИ

O‘ZBEKISTON  
JURNALI

2  
2021

УЗБЕКСКИЙ  
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ  
МЕХАНИКИ

*Журнал под таким названием издается с января 1992 г.*

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*Главный редактор* – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ  
*Заместители главного редактора:* докт. физ.-мат. наук Р.А. АБИРОВ,  
докт. техн. наук З.М. МАЛИКОВ, докт. техн. наук, проф. Д.М. МУХАМАДИЕВ  
*Ответственный секретарь* – PhD. Н.А. НИШОНОВ

*Члены редколлегии:* докт. техн. наук, проф. А. АБДУСАТТАРОВ,  
докт. физ.-мат. наук, проф. Р.А. АБДИКАРИМОВ, докт. техн. наук, проф. Ш.П. АЛИМУХАМЕДОВ,  
докт. физ.-мат. наук, проф. А.Б. АХМЕДОВ, докт. техн. наук, проф. Г.А. БАХАДИРОВ,  
докт. техн. наук С.И. ИСМОИЛОВА, докт. физ.-мат. наук, проф. Н.А. КОРШУНОВА,  
докт. техн. наук, проф. А.Е.ЛУГАЧЕВ, докт. техн. наук, проф. Р.К. МАМАЖОНОВ,  
докт. физ.-мат. наук, проф. Б.М. МАРДОНОВ, докт. техн. наук, проф., академик М. МИРСАИДОВ,  
докт. техн. наук, проф. Р.М.МУРОДОВ, докт. техн. наук, проф. А.А. РИЗАЕВ,  
канд. техн. наук Х.С. САГДИЕВ, канд. физ.-мат. наук Ш.М. ТОХИРОВ,  
докт. техн. наук, проф. М. ТОШБОЛТАЕВ, докт. техн. наук, проф. А.Т. ТУХТАКУЗИЕВ,  
докт. техн. наук, проф. А.З. ХАСАНОВ, докт. техн. наук, проф. И.К. ХУЖАЕВ,  
докт. физ.-мат. наук, проф. Б.Х. ХУЖАЁРОВ, PhD. А.С. ЮВМИТОВ,  
докт. техн. наук, проф. Ш.С.ЮЛДАШЕВ

*Адрес редакции:*  
100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 33.  
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз

*Телефон:* + 99871 262-78-34  
*Факс:* +99871 262-71-52  
*E-mail:* [instmechofficial@gmail.com](mailto:instmechofficial@gmail.com)

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.  
Регистрационный номер 0050.

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 11.08.2021  
Сдано в набор 15.07.2021. Подписано в печать 15.08.2021.  
Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Гарнитура Times New Roman. Ризография.  
Усл.-печ. л. 13.48. Уч.-изд. л. 9.62. Тираж 150. Заказ № 660.  
Цена договорная.

Отпечатано в Минитипографии АН РУз:  
100047, г. Ташкент, ул. акад. Я. Гулямова, 70.

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

Абдусаттаров А<sup>1</sup>., Исомиддинов А.И<sup>2</sup>., Рузиева Н.Б<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан

E-mail: nodi2005@rambler.ru

**Аннотация:** В статье приводится упругопластический расчет тонкостенных стержней при повторно-переменном нагружении с учетом повреждаемости материала и обобщенного принципа Мазинга–Москвитина. На основе деформационной теории и вариационного принципа Гамильтона–Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения (равновесия) при переменном нагружении и сформулированы краевые задачи. Приведены результаты расчета тонкостенных стержней прямоугольного сечения при знакопеременном нагружении с учетом накопления повреждений. Представлены численные результаты для компонентов перемещений в зависимости от числа итераций и циклов нагружений на основе различных диаграмм деформирования. Графически показан учет влияния вторичных пластических деформаций и упругой разгрузки.

**Ключевые слова:** упругость; пластичность; повреждаемость; переменное нагружение; вариационный принцип.

### 1. Введение

Как известно, работа большинства несущих элементов конструкций и сооружений происходит на фоне выхода материалов за пределы упругости. При действии циклических нагрузок это приводит к возникновению ряда дополнительных явлений, таких как вторичные пластические деформации, изменение диаграмм деформирования от цикла к циклу, проявление свойств циклического упрочнения-разупрочнения и деформационной анизотропии, теплообразование, накопление повреждений и распространение трещин, приводящих к разрушению материала [1–5].

Общая формулировка феноменологического подхода к описанию накопления повреждений дана А.А.Ильюшиным [1]. В работе В.В.Москвитина [2] сформулированы основные уравнения переменной пластичности и вязкопластичности с учетом накопленных повреждений, доказаны теоремы о переменном нагружении, вторичных пластических деформациях. Рассмотрены вопросы циклической и длительной прочности элементов конструкций.

В работе [3] рассмотрены современные проблемы оценки сопротивления материалов и элементов конструкций действию широкого круга повреждающих факторов. Обосновывается применение уравнений состояния, моделей деформирования и разрушения при кратковременном и длительном, малоцикловом и многоцикловом нагружениях. Подробное описание диаграмм циклического деформирования для различных конструктивных материалов выполнено в [4] и показаны возможные уточнения интерпретаций диаграмм при решении задач циклической прочности.

Статья [5] посвящена проблеме построения математических моделей повреждаемых термоупруговязкопластических сред и методам определения «нестандартных» констант моделей, связанных с параметрами поврежденности и подлежащих экспериментальному определению. В работе [6] рассматривается компьютерное моделирование процессов деформирования, поврежденности и континуального разрушения нелинейных материалов и конструкций.

В статье [7] рассматривается современная теория неупругости (термовязкопластичности), являющаяся обобщением и развитием идей, содержащихся в различных вариантах теории пластичности, ползучести, неупругости и накопления повреждений.

В статье [8] представлены результаты исследований, определяющие соотношения по классическим моделям сплошных сред и обобщенные областью конечных деформаций. Работа Р.А. Абирова [9] посвящена построению определяющих соотношений на основе экспериментального исследования, установлены области физической достоверности теории пластичности применительно к процессам сложного циклического нагружения, а также экспериментально доказана сходимость метода СН-ЭВМ при различных вариантах аппроксимации определяющих соотношений.

В [10] выведены уравнения равновесия и предложены методы решения упругих, упругопластических и вязкоупругопластических стержней. Численно исследована НДС трехслойных стержней при действии однократных и циклических нагрузок.

В работе Т.Буриева [11] сформулирован ряд краевых задач по расчету несущих элементов тонкостенных конструкций при повторных и переменных упругопластических нагружениях и разгрузках в текущих величинах. Исследована сходимость созданных им алгоритмов и итерационных процессов в зависимости от степени развития пластических деформаций.

## 2. Цель задачи и методы

Из краткого обзора следует, что в данном направлении важнейшими задачами являются разработка моделей деформирования тонкостенных конструкций - стержней и совершенствование метода расчета и анализа НДС при переменных нагружениях с учетом повреждаемости. Целью задачи являются разработка моделей на основе деформационной теории и вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, вывод системы дифференциальных уравнений движения (равновесия) при переменных нагружениях, формулирование краевых задач и применение метода конечных разностей.

## 3. Постановка задачи

Приведем постановку задачи и схему расчета тонкостенных стержней при пространственно-переменном нагружении на основе теории малых упругопластических деформаций А.А.Ильюшина и уточненной теории стержней, предложенной В.З.Власовым, Г.Ю.Джанелидзе и В.К.Кабуловым. При пространственном нагружении, т.е. при совместных продольных, поперечных и крутильных силах законы распределения перемещений, деформаций и напряжений в сечениях стержня являются сложными, поэтому уточненная теория строится на основании ряда статических гипотез [12].

Рассмотрим тонкостенный стержень произвольного сечения при воздействии внешних переменных сил. Ось  $OX$  направим по длине стержня, а оси  $OZ$  и  $OY$  – по поперечному сечению. Перемещения центральной линии стержня при исходном нагружении обозначим через  $u_i'$ , компоненты деформаций и напряжений – через  $e'_{ij}$ ,  $\sigma'_{ij}$ .

Следуя теории В.В.Москвитина [2], введем разности

$$\begin{aligned}\bar{u}_i^{(n)} &= (-1)^n (u_i^{(n-1)} - u_i^{(n)}), \quad \bar{e}_{ij}^{(n)} = (-1)^n (e_{ij}^{(n-1)} - e_{ij}^{(n)}), \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} &= (-1)^n (\sigma_{ij}^{(n-1)} - \sigma_{ij}^{(n)}).\end{aligned}\tag{1}$$

Перемещения точек стержня при переменном нагружении представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^{(n)} &= \bar{u}^{(n)} - y\bar{\alpha}_1^{(n)} - z\bar{\alpha}_2^{(n)} + \varphi\bar{v}^{(n)} + a_1\bar{\beta}_1^{(n)} + a_2\bar{\beta}_2^{(n)}, \\ \bar{u}_2^{(n)} &= \bar{v}^{(n)} - z\bar{\theta}^{(n)}, \quad \bar{u}_3^{(n)} = \bar{w}^{(n)} + y\bar{\theta}^{(n)},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\bar{u}^{(n)}$ ,  $\bar{v}^{(n)}$ ,  $\bar{w}^{(n)}$  – компоненты перемещений при  $n$ -ном нагружении;  $\alpha_1^{(n)}$ ,  $\alpha_2^{(n)}$  – углы поворота сечения при чистом изгибе;  $\beta_1^{(n)}$ ,  $\beta_2^{(n)}$  – углы поперечного сдвига;  $\theta^{(n)}$  – угол кручения;  $\nu_1^{(n)}$  – погонная закрутка при  $n$ -ном нагружении;  $\varphi$  – функция кручения Сен-Венана.

Согласно формуле Коши, с учетом (2) определяем компоненты деформации:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} &= \frac{\partial \bar{u}^{(n)}}{\partial x} - y \frac{\partial \bar{\alpha}_1^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \bar{\alpha}_2^{(n)}}{\partial x} + \varphi(y, z) \frac{\partial \bar{v}^{(n)}}{\partial x} + a_1(y, z) \frac{\partial \bar{\beta}_1^{(n)}}{\partial x} + a_2(y, z) \frac{\partial \bar{\beta}_2^{(n)}}{\partial x}; \\ \bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} &= \frac{\partial \bar{w}^{(n)}}{\partial x} + y \frac{\partial \bar{\theta}^{(n)}}{\partial x} - \bar{\alpha}_2^{(n)} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{v}^{(n)} + \frac{\partial a_1}{\partial z} \bar{\beta}_1^{(n)} + \frac{\partial a_2}{\partial z} \bar{\beta}_2^{(n)}, \\ \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} &= \frac{\partial \bar{v}^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \bar{\theta}^{(n)}}{\partial x} - \bar{\alpha}_1^{(n)} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{v}^{(n)} + \frac{\partial a_1}{\partial y} \bar{\beta}_1^{(n)} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \bar{\beta}_2^{(n)}.\end{aligned}\quad (3)$$

Для построения зависимости между интенсивностями напряжений  $\bar{\sigma}_u^{(n)}$  и деформаций  $\bar{\varepsilon}_u^{(n)}$ , характеризующей упругопластические свойства и повреждаемость материалов при переменном нагружении, воспользуемся обобщенным принципом Мазинга и циклической диаграммой деформирования, учитывающей накопление повреждаемости [2–4, 11].

Согласно теории переменной пластичности, компоненты напряжений связаны через деформации следующим образом:

а) при переменном нагружении в фиктивных координатах

$$\bar{\sigma}_{11}^{(n)} = 3G(1 - \omega^{(n)})\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)}, \quad \bar{\sigma}_{13}^{(n)} = G(1 - \omega^{(n)})\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)}, \quad \bar{\sigma}_{12}^{(n)} = G(1 - \omega^{(n)})\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)}; \quad (4)$$

б) при переменном нагружении в текущих координатах

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(k)} &= 3G \left\{ e_{11}^{(k)} - \left[ \omega^{(k)} e_{11}^{(k)} + \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{\varepsilon}_{11}^{0(k-m)} \right] \right\}, \quad \sigma_{13}^{(k)} = G \left\{ e_{31}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{\varepsilon}_{31}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{\varepsilon}_{31}^{0(k-m)} \right\}, \\ \sigma_{12}^{(k)} &= G \left\{ e_{12}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{\varepsilon}_{12}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{\varepsilon}_{12}^{0(k-m)} \right\}.\end{aligned}\quad (5)$$

При линейном упрочнении

$$\omega^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} \leq \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) \\ \lambda_n \left[ 1 - \frac{\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta)}{\bar{\varepsilon}_u^{(n)}} \right], & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} > \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) \end{cases}$$

В случае обобщенного принципа Мазинга  $\lambda_n = \lambda$ ,  $\bar{\varepsilon}_u^{(n)} = \alpha_n \varepsilon_s$ , при использовании диаграмм деформирования Гусенкова – Шнейдеровича  $\bar{\varepsilon}_s^{(n)} = 2\varepsilon_s$ ,  $\lambda_n = 1 - g_n$ , где  $g_n$  определяется экспериментально. При учете накопления повреждений

$$\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) = \alpha_1^{n-2} (1 + \alpha_1) \varepsilon_s + (3G)^{-1} B^{1/\alpha} \cdot [1 - 0,5(1 + \alpha_1) \alpha_1^{n-2}] [1 - (1 - \eta)^{1+\alpha}]^{1/\alpha} (n-1)^{-1/\alpha}.$$

Функция повреждаемости  $\eta$  определяется из кинетического уравнения [2]:

$$\frac{d\eta}{dn} = f(\bar{\sigma}_u, \eta_n) \quad \text{или} \quad \eta = \int_0^n F(n-m) \mu(\bar{\sigma}_u^{(n)}) dm. \quad (6)$$

При условии  $\eta(0)=0$ ,  $\eta(N)=1$ , где  $N$  – число полуциклов до наступления предельного состояния (разрушения).

#### 4. Вывод уравнения движения стержней

Для вывода уравнений движения стержней (трубопровода) при пространственном нагружении с учетом упругопластических деформаций используем вариационный принцип Гамильтона–Остроградского [11]:

$$\delta \int_t (T - \Pi + A) dt = 0. \quad (7)$$

Сначала определим вариации кинетической энергии, при этом используем соотношение

$$\delta \int_t T dt = \int_t \int_V \rho \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t} \right) dv dt \quad (8)$$

Выполняя операции интегрирования по частям, получим

$$\delta \int_t T dt = \int_t \rho \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta u_i^{(n)} \right] dv \Big|_t - \int_t \int_V \rho \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial t^2} \cdot \delta u_i^{(n)} \right] dv dt \quad (9)$$

В соотношении (9) первое и второе слагаемые обозначим через  $I_1$ ,  $I_2$  и перепишем в следующем виде:

$$I_1 = \int_V \rho \left[ \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta u_1^{(n)} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta u_2^{(n)} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta u_3^{(n)} \right] dV \Big|_t \quad (10)$$

$$I_2 = \int_t \int_V \rho \left[ \frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial t^2} \cdot \delta u_1^{(n)} + \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial t^2} \cdot \delta u_2^{(n)} + \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2} \cdot \delta u_3^{(n)} \right] dV dt \quad (11)$$

Теперь выражения перемещений (2) подставим под знаками вариации (10):

$$I_1 = \int_V \rho \left[ \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta(u^{(n)} - y\alpha_1^{(n)} - z\alpha_2^{(n)} + \varphi v^{(n)} + a_1\beta_1^{(n)} + a_2\beta_2^{(n)}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta(v^{(n)} - z\theta^{(n)}) + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta(w^{(n)} + \theta^{(n)}) \right] dV \Big|_t.$$

Раскроем скобки и выполним операции интегрирования по сечению стержня, введем следующие обозначения:

$$\int_F dF = F_x, \quad \int_F y \varphi dF = S_\varphi, \quad \int_F y dF = S_z, \quad \int_F z dF = S_y, \quad \int_F a_1 dF = S_{a_1}, \quad \int_F a_2 dF = S_{a_2}, \\ \int_F y^2 dF = J_z, \quad \int_F z^2 dF = J_y, \quad \int_F (y^2 + z^2) dF = J_\rho, \quad \int_F y z dF = J_{yz}, \quad \int_F \varphi^2 dF = J_\varphi, \\ \int_F a_1 \varphi dF = J_{a_1\varphi}, \quad \int_F a_2 \varphi dF = J_{a_2\varphi}, \quad \int_F z a_1 dF = J_{za_1}, \quad \int_F z a_2 dF = J_{za_2}, \quad \int_F y a_1 dF = J_{ya_1}, \\ \int_F y \varphi dF = J_{y\varphi}, \quad \int_F z \varphi dF = J_{z\varphi}, \quad \int_F a_1^2 dF = J_{a_1}, \quad \int_F a_2^2 dF = J_{a_2}, \quad \int_F a_1 a_2 dF = J_{a_1 a_2}, \quad \int_F y a_2 dF = J_{ya_2}.$$

Интеграл  $I_1$  с учетом обозначений запишем в следующем виде:

$$I_1 = \int_x \left\{ \left[ F \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} - S_z \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial t} - S_y \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial t} + S_\varphi \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} + S_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial t} + S_{a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial t} \right] \delta u + \left[ F \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} - \right. \right. \\ \left. \left. - S_y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial t} \right] \delta v + \left[ F \frac{\partial w^{(n)}}{\partial t} + S_z \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial t} \right] \delta w - \left[ S_z \frac{\partial u}{\partial t} - J_z \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{y\varphi} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{ya_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \right. \\ \left. + J_{ya_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_1 - \left[ S_y \frac{\partial u}{\partial t} - J_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_y \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{z\varphi} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{za_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{za_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_2 + \left[ S_\varphi \frac{\partial u}{\partial t} - \right. \\ \left. - J_{y\varphi} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{z\varphi} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_\varphi \frac{\partial v}{\partial t} + J_{\varphi a_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{\varphi a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta v + \left[ S_z \frac{\partial w}{\partial t} - S_y \frac{\partial v}{\partial t} + J_\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta \theta + \\ \left. + \left[ S_{a_1} \frac{\partial u}{\partial t} - J_{ya_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{za_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{\varphi a_1} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{a_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \beta_1 + \right. \\ \left. + \left[ S_{a_2} \frac{\partial u}{\partial t} - J_{ya_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{za_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{\varphi a_2} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \beta_2 \right\} dx \Big|_t.$$

Аналогичным образом определяем вторую часть кинетического уравнения (11), т.е. выражения интеграла  $I_2$ :

$$\begin{aligned}
 I_2 = \int \int_{t \times x} & \left\{ \left[ F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - S_z \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - S_y \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + S_\varphi \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + S_{a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + S_{a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \right] \delta u - \left[ S_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_z \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \right. \right. \\
 & - J_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{y\varphi} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + J_{ya_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{ya_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \left. \right] \delta \alpha_1 - \left[ S_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - J_y \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{z\varphi} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \right. \\
 & + J_{za_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{za_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \left. \right] \delta \alpha_2 + \left[ S_\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{\varphi z} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - J_{z\varphi} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_\varphi \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + J_{\varphi a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{\varphi a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \right] \delta \nu + \\
 & + \left[ S_{a_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{ya_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - J_{za_1} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{a_1\varphi} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + J_{a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \right] \delta \beta_1 + \left[ S_{a_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{ya_2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \right. \\
 & - J_{za_2} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{\varphi a_2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + J_{a_2\varphi} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \left. \right] \delta \beta_2 + \left[ S_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S_y \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + J_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta \theta + \\
 & + \left[ F \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} - S_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta \nu + \left[ F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + S_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta w \Big\} dx dt.
 \end{aligned}$$

Учитывая выражения интегралов  $I_1$  и  $I_2$ , вариации кинетической энергии (9) запишем в векторном виде

$$\delta \int_t T dt = \int_x \tilde{A} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial t} E \delta Y^{(n)} dx \Big|_t - \int \int_{t \times x} \tilde{A} \frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} E \delta Y^{(n)} dx dt, \quad (12)$$

где  $Y^{(n)} = \{u^{(n)}, \nu^{(n)}, w^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \theta^{(n)}, \nu^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}\}$  – вектор перемещения;  $\tilde{A}$  – матрица девятого порядка;  $E$  – единичная матрица.

Вариация потенциальной энергии стержня в данной постановке имеет вид

$$\delta \int_t \Pi dt = \int \int_{t \times V} \left( \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}^{(n)} \delta e_{ii}^{(n)} \right) dv dt = \int \int_{t \times V} \left[ \sigma_{11}^{(n)} \delta e_{11}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} \delta e_{12}^{(n)} + \sigma_{13}^{(n)} \delta e_{13}^{(n)} \right] dv dt. \quad (13)$$

Выражения деформации (3) подставим в (13):

$$\begin{aligned}
 \delta \int_t \Pi dt = \int \int_{t \times V} & \left\{ \sigma_{11}^{(n)} \delta \left( \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) + \right. \\
 & + \sigma_{13}^{(n)} \delta \left( \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} + y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \alpha_2^{(n)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \nu^{(n)} + \frac{\partial a_1}{\partial z} \beta_1^{(n)} + \frac{\partial a_2}{\partial z} \beta_2^{(n)} \right) + \\
 & + \sigma_{12}^{(n)} \delta \left[ \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \alpha_1^{(n)} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \nu^{(n)} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \beta_1^{(n)} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \beta_2^{(n)} \right] \Big\} dv dt. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Преобразуем вариации потенциальной энергии (14). Для этого раскроем скобки под знаком вариации и выделим интеграл по сечению стержня. После некоторых выкладок и обозначений из (14) имеем:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_t \Pi dt = \int_t & \left\{ N_x^{(k)} \delta u^{(k)} - M_z^{(k)} \delta \alpha_1^{(k)} - M_y^{(k)} \delta \alpha_2^{(k)} + Q_y^{(k)} \delta \nu^{(k)} + Q_z^{(k)} \delta w^{(k)} + M_x^{(k)} \delta \theta^{(k)} + \right. \\
 & + M_z^{(k)} \delta \nu^{(k)} + M_{a_1}^{(k)} \delta \beta_1^{(k)} + M \sum_{a_2} \delta \beta_2^{(k)} \Big\} dt \Big|_x - \int \int_{t \times x} \left[ \frac{\partial N_x^{(k)}}{\partial x} \delta u^{(k)} + \frac{\partial Q_y^{(k)}}{\partial x} \delta \nu^{(k)} + \frac{\partial Q_z^{(k)}}{\partial x} \delta w^{(k)} + \right. \\
 & + \left( Q_y^{(k)} - \frac{\partial M_z^{(k)}}{\partial x} \right) \delta \alpha_1^{(k)} + \left( Q_z^{(k)} - \frac{\partial M_y^{(k)}}{\partial x} \right) \delta \alpha_2^{(k)} + \frac{\partial M_x^{(k)}}{\partial x} \delta \theta^{(k)} + \left( \frac{\partial M_\varphi^{(k)}}{\partial x} - Q_\nu^{(k)} \right) \delta \nu^{(k)} +
 \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \left( \frac{\partial M_{a_1}^{(k)}}{\partial x} - Q_{\beta_1}^{(k)} \right) \delta \beta_1^{(k)} + \left( \frac{\partial M_{a_2}^{(k)}}{\partial x} - Q_{\beta_2}^{(k)} \right) \delta \beta_2^{(k)} \right\} dx dt \quad (15)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \int_F \sigma_{11}^{(n)} dF &= N_x^{(n)}, \quad \int_F \sigma_{12}^{(n)} dF = Q_y^{(n)}, \quad \int_F \sigma_{11}^{(n)} y dF = M_z^{(n)}, \\ \int_F \varphi \sigma_{11}^{(n)} dF &= M_\varphi^{(n)}, \quad \int_F a_1 \sigma_{11}^{(n)} dF = M_{a_1}^{(n)}, \quad \int_F a_2 \sigma_{11}^{(n)} dF = M_{a_2}^{(n)}, \\ \int_F (\sigma_{13}^{(n)} y - \sigma_{12}^{(n)} z) dF &= M_x^{(n)}, \quad \int_F \sigma_{11}^{(n)} z dF = M_y^{(n)}, \quad \int_F \sigma_{13}^{(n)} dF = Q_z^{(n)}, \\ \int_F \left( \sigma_{13}^{(n)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sigma_{12}^{(n)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dF &= Q_v^{(n)}, \quad \int_F \sigma_{13}^{(n)} \frac{\partial a_1}{\partial z} dF = Q_{\beta_1}^{(n)}, \quad \int_F \sigma_{13}^{(n)} \frac{\partial a_2}{\partial z} dF = Q_{\beta_2}^{(n)}. \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом соотношений (5) и обозначений (16) выражения внутренних усилий и моментов, например  $N_x^{(n)}$  и  $M_{a_2}^{(n)}$ , можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_x^{(k)}(x, t) &= 3G \left\{ \left( \tilde{F} - \tilde{F}_\omega^{(k)} \right) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} - \left( S_z - S_{z\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \alpha_1^{(k)}}{\partial x} - \left( S_y - S_{y\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \alpha_2^{(k)}}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \left( S_\varphi - S_{\varphi\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \nu_1^{(k)}}{\partial x} + \left( S_{a_1} - S_{a_1\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{\partial x} + \left( S_{a_2} - S_{a_2\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \beta_2^{(k)}}{\partial x} - N_{x\omega}^{0(k-1)} + N_{x\omega}^{0(k-m)} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N_{x\omega}^{0(k-1)} &= 3G \left[ -F_\omega^{(k)} \frac{\partial u^{0(k-1)}}{\partial x} + S_{z\omega}^{0(k-1)} \frac{\partial \alpha_1^{0(k-1)}}{\partial x} - S_{y\omega}^{0(k-1)} \frac{\partial \alpha_2^{0(k-1)}}{\partial x} + S_{\varphi\omega}^{0(k-1)} \frac{\partial \nu_1^{0(k-1)}}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + S_{a_1\omega}^{0(k-1)} \frac{\partial \beta_1^{0(k-1)}}{\partial x} + S_{a_2\omega}^{0(k-1)} \frac{\partial \beta_2^{0(k-1)}}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{x\omega}^{0(k-m)} &= 3G \left\{ \sum_{m=1}^{k-1} \left[ F_\omega^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (u^{0(k-m)} - u^{0(k-m-1)}) - S_{z\omega}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1^{0(k-m)} - \alpha_1^{0(k-m-1)}) - \right. \right. \\ &\quad \left. - S_{y\omega}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_2^{0(k-m)} - \alpha_2^{0(k-m-1)}) + S_{\varphi\omega}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (\nu_1^{0(k-m)} - \nu_1^{0(k-m-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + S_{a_1\omega}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (\beta_1^{0(k-m)} - \beta_1^{0(k-m-1)}) + S_{a_2\omega}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (\beta_2^{0(k-m)} - \beta_2^{0(k-m-1)}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{a_2}^{(k)}(x, t) &= 3G \left\{ \left[ \left( S_{a_2} - S_{a_2\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \left( I_{a_2y} - I_{a_2y}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial \alpha_1^{(k)}}{\partial x} + \left( I_{a_2z} - I_{a_2z}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial \alpha_2^{(k)}}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. + \left( I_{a_2\varphi} - I_{a_2\varphi}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial \nu_1^{(k)}}{\partial x} + \left( I_{a_1a_2} - I_{a_1a_2}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{\partial x} + \left( I_{a_2} - I_{a_2\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \beta_2^{(k)}}{\partial x} - M_{a_2}^{0(k-1)} + M_{a_2}^{0(k-m)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$M_{a_2}^{0(k-1)} = 3G \left[ -S_{a_2\omega}^{(k)} \frac{\partial u^{0(k-1)}}{\partial x} + I_{a_2y}^{\omega(k)} \frac{\partial \alpha_1^{0(k-1)}}{\partial x} + I_{a_2z}^{\omega(k)} \frac{\partial \alpha_2^{0(k-1)}}{\partial x} - I_{a_2\varphi}^{\omega(k)} \frac{\partial \nu_1^{0(k-1)}}{\partial x} - I_{a_1a_2}^{\omega(k)} \frac{\partial \beta_1^{0(k-1)}}{\partial x} - I_{a_2}^{\omega(k)} \frac{\partial \beta_2^{0(k-1)}}{\partial x} \right],$$

$$M_{a_2}^{0(k-m)} = 3G \left\{ \sum_{m=1}^{k-1} \left[ S_{a_2}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (u^{0(k-m)} - u^{0(k-m-1)}) - I_{a_2 y}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1^{0(k-m)} - \alpha_1^{0(k-m-1)}) - \right. \right. \\ \left. - I_{a_1 z}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_2^{0(k-m)} - \alpha_2^{0(k-m-1)}) + I_{a_2 \varphi}^{0(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} (v_1^{0(k-m)} - v_1^{0(k-m-1)}) + \right. \\ \left. + I_{a_1 a_2}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} (\beta_1^{0(k-m)} - \beta_1^{0(k-m-1)}) + I_{a_2 \omega}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} (\beta_2^{0(k-m)} - \beta_2^{0(k-m-1)}) \right] \right\} \quad (17)$$

где

$$F_x = \int_F dF, \quad S_z = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F z dF, \quad S_\varphi = \int_F \varphi dF, \quad S_{a_1} = \int_F a_1 dF, \quad S_{a_2} = \int_F a_2 dF, \\ J_{a_2 y} = \int_F a_2 y dF, \quad J_{a_2 z} = \int_F a_2 z dF, \quad J_{a_2 \varphi} = \int_F \varphi a_2 dF, \quad J_{a_1 a_2} = \int_F a_1 a_2 dF, \quad J_{a_2} = \int_F a_2^2 dF.$$

Аналогичным образом определяются интегралы  $F_\omega^{(k)}, \dots, J_{a_2}^{\omega(k)}$ , содержащие функции пластичности  $\omega$ , например,  $F_\omega^{(k)} = \int_F \omega^{(k)} dF, \dots, J_{a_2}^{\omega(k)} = \int_F \omega^{(k)} a_2^2 dF$  и т.д.

Выражения внутренних усилий и моментов (17) подставим в вариации потенциальной энергии (15). Для краткости записи введены обозначения следующего вида:  $\tilde{F}_x = F_x - F_\omega^{(k)}, \quad \tilde{S}_z = S_z - S_{z\omega}^{(k)}, \dots, \tilde{I}_{a_2} = I_{a_2} - I_{a_2}^{(k)}$ .

В результате получим

$$\delta \int_t \Pi dt = \int_t \left\{ 3G \left[ \tilde{F}_x \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \tilde{S}_z \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - \tilde{S}_y \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \tilde{S}_\varphi \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \tilde{S}_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + \tilde{S}_{a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right] \delta u^{(n)} - \right. \\ \left. - 3G \left[ \tilde{S}_z \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_z \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{yz} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{y\varphi} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{ya_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{ya_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right] \delta \alpha_1^{(n)} - \right. \\ \left. - 3G \left[ \tilde{S}_y \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{yz} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_y \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{z\varphi} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{za_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{za_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right] \delta \alpha_2^{(n)} + \right. \\ \left. G \left[ \tilde{F}_x \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} - \tilde{S}_y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \tilde{F}_x \alpha_1^{(n)} + \tilde{S}_{\varphi_y} v^{(n)} + \tilde{S}_{a_1 y} \beta_1^{(n)} + \tilde{S}_{a_2 y} \beta_2^{(n)} \right] \delta v^{(n)} + \right. \\ \left. + G \left[ \tilde{F}_x \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} + \tilde{S}_z \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \tilde{F}_x \alpha_2^{(n)} + \tilde{S}_{\varphi_z} v^{(n)} + \tilde{S}_{a_1 z} \beta_1^{(n)} + \tilde{S}_{a_2 z} \beta_2^{(n)} \right] \delta w^{(n)} + \right. \\ \left. + G \left[ -\tilde{S}_y \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \tilde{S}_z \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_\rho \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} + \tilde{S}_y \alpha_1^{(n)} - \tilde{S}_z \alpha_2^{(n)} + \tilde{J}_{\varphi_y \varphi_z} v^{(n)} + \tilde{J}_{a_1 y a_1 z} \beta_1^{(n)} + \tilde{J}_{a_2 y a_2 z} \beta_2^{(n)} \right] \delta \theta^{(n)} + \right. \\ \left. + 3G \left[ \tilde{S}_\varphi \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{\varphi y} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{\varphi z} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_\varphi \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_1 \varphi} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_2 \varphi} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right] \delta v^{(n)} \right. \\ \left. + 3G \left[ \tilde{S}_{a_1} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{a_1 y} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{a_1 z} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_1 \varphi} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right] \delta \beta_1^{(n)} + \right. \\ \left. + 3G \left[ \tilde{S}_{a_2} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{a_2 y} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{a_2 z} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_2 \varphi} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + \tilde{J}_{a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right] \delta \beta_2^{(n)} \right\} dt \Big|_x -$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_x \left\{ 3G \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{F}_x \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_z \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_y \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_\varphi \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) \left. \right] \delta u^{(n)} + G \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{F}_x \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{F}_x \alpha_1^{(n)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{\varphi_y} \nu^{(n)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_{1y}} \beta_1^{(n)} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_{2y}} \beta_2^{(n)} \right) \left. \right] \delta \nu^{(n)} + G \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{F}_x \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_z \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{F}_x \alpha_2^{(n)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{\varphi_z} \nu^{(n)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_{1z}} \beta_1^{(n)} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_{2z}} \beta_2^{(n)} \right) \left. \right] \delta w^{(n)} + G \left[ -3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_z \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{F}_x \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_z \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{yz} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} \right) - \right. \\
& 3 \tilde{S}_y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{y\varphi} \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{ya_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{ya_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) - \tilde{F}_x \alpha_1^{(n)} + \tilde{S}_{\varphi_y} \nu^{(n)} + \tilde{S}_{a_{1y}} \beta_1^{(n)} + \\
& + \tilde{S}_{a_{2y}} \beta_2^{(n)} \left. \right] \delta \alpha_1^{(n)} + G \left[ -3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_y \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{F}_x \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{yz} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_y \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{S}_z \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \right. \\
& - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{z\varphi} \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{za_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{za_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) - \tilde{F}_x \alpha_2^{(n)} + \tilde{S}_{\varphi_z} \nu^{(n)} + \tilde{S}_{a_{1z}} \beta_1^{(n)} + \tilde{S}_{a_{2z}} \beta_2^{(n)} \left. \right] \delta \alpha_2^{(n)} + \\
& + 3G \left[ - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_z \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_z \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_\rho \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_y \alpha_1^{(n)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_z \alpha_2^{(n)} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{\varphi_y \varphi_z} \nu^{(n)} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_{1y} a_{1z}} \beta_1^{(n)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_{2y} a_{2z}} \beta_2^{(n)} \right) \left. \right] \delta \theta^{(n)} + G \left[ 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_\varphi \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) - 3 \tilde{S}_{\varphi_y} \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} - 3 \tilde{S}_{\varphi_z} \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} - \tilde{J}_{\varphi_z \varphi_y} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} + \right. \\
& - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{\varphi_z} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_\varphi \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} \right) - \tilde{J}_{a_{1yz} \varphi_{yz}} \beta_1^{(n)} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_1 \varphi} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_2 \varphi} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{S}_{\varphi_y} \alpha_1^{(n)} + \\
& + \tilde{S}_{\varphi_z} \alpha_2^{(n)} - \tilde{J}_{\varphi_y^2 \varphi_z^2} \nu^{(n)} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{\varphi_y} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} \right) - \tilde{J}_{a_{2yz} \varphi_{yz}} \beta_2^{(n)} \left. \right] \delta \nu^{(n)} + G \left[ 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_1} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) - \tilde{S}_{a_{1y}} \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} - \right. \\
& - \tilde{S}_{a_{1z}} \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_{1y}} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{S}_{a_{1y}} \alpha_1^{(n)} + \tilde{S}_{a_{1z}} \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} - \\
& - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_{1y}} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{S}_{a_{1y}} \alpha_1^{(n)} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_{1z}} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} \right) - \tilde{J}_{a_{1y} a_{1z}} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} + \\
& - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_1 \varphi} \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{S}_{a_{1z}} \alpha_2^{(n)} - \tilde{J}_{a_{1y} \varphi_{yz}} \nu^{(n)} - \tilde{J}_{a_{1y} a_{2yz}} \beta_1^{(n)} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{J}_{a_{1y} a_{2y}} \beta_2^{(n)} \left. \right] \delta \beta_1^{(n)} + \\
& + G \left[ 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S}_{a_2} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) - 3 \tilde{S}_{a_{2y}} \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} - \tilde{S}_{a_{2z}} \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_{2y}} \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_{2z}} \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} \right) - \tilde{J}_{a_{2y} a_{2z}} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} + \right. \\
& + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_2 \varphi} \frac{\partial \nu^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_2} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}_{a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) + \tilde{S}_{a_{2y}} \alpha_1^{(n)} + \tilde{S}_{a_{2z}} \alpha_2^{(n)} - \\
& - \tilde{J}_{a_{2yz} \varphi_{yz}} \nu^{(n)} - \tilde{J}_{a_{1yz} a_{2yz}} \beta_1^{(n)} - \tilde{J}_{a_{2z} a_{2y}} \beta_2^{(n)} \left. \right] \delta \beta_2^{(n)} \Big\} dx dt
\end{aligned} \tag{18}$$

Введя некоторые, обозначения вариации потенциальной энергии (18) представим в векторном виде

$$\begin{aligned} \delta \int_t \Pi dt = \int_t \left\{ (A^{yn} - A^{n,l}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{n,l}) Y^{(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dt \Big|_x + \int_t \int_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( (A^{yn} - A^{n,l}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + (B^{yn} - B^{n,l}) Y^{(n)} \right) + (C^{yn} - C^{n,l}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (D^{yn} - D^{n,l}) Y^{(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dx dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим вариации работы внешних сил:

$$\delta \int_t A dt = \int_t \int_V \sum_{i=1}^3 p_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} dV dt + \int_t \int_S \sum_{i=1}^3 q_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} dS dt + \int_t \int_{s_1} \sum_{i=1}^3 f_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} ds_1 dt \Big|_x, \quad (20)$$

где  $p_i^{(n)}$  – объемные силы при  $n$ -ном нагружении;  $q_i^{(n)}$  – поверхностные силы;  $f_i^{(n)}$  – торцевые силы.

К соотношению (20) подставляем выражения перемещений (2). Раскроем скобки и выполним интегрирование по поперечным сечениям стержня:

$$\begin{aligned} \delta \int_t A dt = \int_t \int_x \left\{ \int_F [p_1^{(n)} \delta(u^{(n)} - y\alpha_1^{(n)} - z\alpha_2^{(n)} + \varphi v^{(n)} + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)}) + p_2^{(n)} \delta(v^{(n)} - z\theta^{(n)}) + \right. \\ \left. + p_3^{(n)} \delta(w^{(n)} + y\theta^{(n)})] dF \right\} dx dt + \int_t \int_x \left\{ \int_l [q_1^{(n)} \delta(u^{(n)} - y\alpha_1^{(n)} - z\alpha_2^{(n)} + \varphi v^{(n)} + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)}) + \right. \\ \left. + q_2^{(n)} \delta(v^{(n)} - z\theta^{(n)}) + q_3^{(n)} \delta(w^{(n)} + y\theta^{(n)})] dl \right\} dx dt + \int_t \int_{s_1} \left\{ \int [f_1^{(n)} \delta(u^{(n)} - y\alpha_1^{(n)} - z\alpha_2^{(n)} + \varphi v^{(n)} + \right. \\ \left. + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)}) + f_2^{(n)} \delta(v^{(n)} - z\theta^{(n)}) + f_3^{(n)} \delta(w^{(n)} + y\theta^{(n)})] ds_1 \right\} dt \Big|_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \int_F p_1^{(n)} dF = N_x^{o\delta(n)}, \quad \int_F y p_1^{(n)} dF = M_z^{o\delta(n)}, \quad \int_F z p_1^{(n)} dF = M_y^{o\delta(n)}, \\ \int_F \varphi p_1^{(n)} dF = M_\varphi^{o\delta(n)}, \quad \int_F a_1 p_1^{(n)} dF = M_{a_1}^{o\delta(n)}, \quad \int_F a_2 p_1^{(n)} dF = M_{a_2}^{o\delta(n)}, \\ \int_F p_2^{(n)} dF = Q_y^{o\delta(n)}, \quad \int_F p_3^{(n)} dF = Q_z^{o\delta(n)}, \quad \int_F (y p_3^{(n)} - z p_2^{(n)}) dF = M_x^{o\delta(n)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются поверхностные и торцевые нагрузки, например,  $N_x^{II(n)}$ ,  $N_x^{I(n)}$ . Теперь перепишем соотношения (21) в виде

$$\begin{aligned} \delta \int_t A dt = \int_t \int_x \left\{ (N^{o\delta(n)} - N^{II(n)}) \delta u^{(n)} + (Q_y^{o\delta(n)} + Q_y^{II(n)}) \delta v^{(n)} + (Q_z^{o\delta(n)} + Q_z^{II(n)}) \delta w^{(n)} - (M_z^{o\delta(n)} + M_z^{II(n)}) \delta \alpha_1^{(n)} + \right. \\ \left. - (M_y^{o\delta(n)} + M_y^{II(n)}) \delta \alpha_2^{(n)} - (M_x^{o\delta(n)} + M_x^{II(n)}) \delta \theta^{(n)} + (M_\varphi^{o\delta(n)} + M_\varphi^{II(n)}) \delta v^{(n)} + (M_{a_1}^{o\delta(n)} + M_{a_1}^{II(n)}) \delta \beta_1^{(n)} - \right. \\ \left. + (M_{a_2}^{o\delta(n)} - M_{a_2}^{II(n)}) \delta \beta_2^{(n)} \right\} dx dt + \int_t \left\{ N^{I(n)} \delta u^{(n)} + Q_y^{I(n)} \delta v^{(n)} + Q_z^{I(n)} \delta w^{(n)} - M_z^{I(n)} \delta \alpha_1^{(n)} - \right. \\ \left. - M_y^{I(n)} \delta \alpha_2^{(n)} - M_x^{I(n)} \delta \theta^{(n)} + M_\varphi^{I(n)} \delta v^{(n)} + M_{a_1}^{o\delta(n)} \delta \beta_1^{(n)} + M_{a_2}^{o\delta(n)} \delta \beta_2^{(n)} \right\} dt \Big|_x. \end{aligned} \quad (22)$$

В случае учета силы взаимодействия со средой  $q_i^{(n)}$  – поверхностные силы;  $f_i^{(n)}$  – торцевые силы, принимающиеся в следующем виде [13,14]:

$$\begin{aligned} q_i^{(n)} = -k_i^{(n)} (u_i^{(n)} - u_i^{0(n)}) + \bar{q}_i^{(n)}, \\ f_i^{(n)} = -k_i^{ep(n)} (u_i^{(n)} - u_i^{0(n)}) + \bar{f}_i^{(n)}, \end{aligned}$$

где  $k_i^{(n)}$  – коэффициент взаимодействия стержня с окружающей средой на поверхности при переменном нагружении стержня;  $k_i^{ep(n)}$  – коэффициент взаимодействия стержня с окружающей средой на торцах;  $u_i^{0(n)}$  – составляющая пространственного сейсмического перемещения грунта по координатным осям при переменном нагружении:

$$\begin{aligned}
u_1^{0(n)} &= u^{0(n)} - y\alpha_1^{0(n)} - z\alpha_2^{0(n)} + \varphi v^{0(n)} + a_1\beta_1^{0(n)} + a_2\beta_2^{0(n)}, \\
u_2^{0(n)} &= v^{0(n)} - z\theta^{0(n)}, \\
u_3^{0(n)} &= w^{0(n)} + y\theta^{0(n)}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Согласно (2) и (23) выражения  $q_i^{(n)}, f_i^{(n)}$  примут вид:

$$\begin{aligned}
q_1^{(n)} &= -k_1^{(n)}[(u^{(n)} - u^{0(n)}) - y(\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{0(n)}) - z(\alpha_2^{(n)} - \alpha_2^{0(n)}) + \varphi(v^{(n)} - v^{0(n)}) + a_1(\beta_1^{(n)} - \beta_1^{0(n)}) + \\
&\quad + a_2(\beta_2^{(n)} - \beta_2^{0(n)}) + \bar{q}_1^{(n)}] \quad q_2^{(n)} = -k_2^{(n)}[(v^{(n)} - v^{0(n)}) - z(\theta^{(n)} - \theta^{0(n)}) + \bar{q}_2^{(n)}] \\
q_3^{(n)} &= -k_3^{(n)}[(w^{(n)} - w^{0(n)}) + y(\theta^{(n)} - \theta^{0(n)}) + \bar{q}_3^{(n)}].
\end{aligned}$$

Таким же образом определяем  $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}$ . Подставляем выражения  $q_i^{(n)}, f_i^{(n)}$  в вариации работы внешних сил и, вводя ряд обозначений, получим соотношения вида (22) [14] с  $N_x^{e\delta(n)}, Q_y^{e\delta(n)}, \dots, M_{a_2}^{e\delta(n)}$  добавлением, т.е. выражения перед вариацией  $\delta u^{(n)}, \dots, \delta \beta_2^{(n)}$  (22) имеют следующий вид:  $(N_x^{o\delta(n)} + N_x^{II(n)} + N_x^{e\delta(n)}), \dots, (M_{a_2}^{o\delta(n)} + M_{a_2}^{II(n)} + M_{a_2}^{e\delta(n)})$ .

Например,

$$\begin{aligned}
N_x^{e\delta(n)} &= -K_{N_x}^{(n)}[(u^{(n)} - u^{0(n)}) + K_{N_{\alpha_1}}^{(n)}(\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{0(n)}) + K_{N_{\alpha_2}}^{(n)}(\alpha_2^{(n)} - \alpha_2^{0(n)}) + K_{N_\varphi}^{(n)}(v^{(n)} - v^{0(n)}) - \\
&\quad - K_{N_{\beta_1}}^{(n)}(\beta_1^{(n)} - \beta_1^{0(n)}) - K_{N_{\beta_2}}^{(n)}(\beta_2^{(n)} - \beta_2^{0(n)})],
\end{aligned}$$

где  $K_{N_x}^{(n)}, K_{N_{\alpha_1}}^{(n)}, K_{N_{\alpha_2}}^{(n)}, \dots, K_{N_{\beta_2}}^{(n)}$  – коэффициенты, определяемые из эксперимента [14].

В дальнейшем следует уточнить закон взаимодействия и нелинейные коэффициенты, определяемые экспериментальным путём с учетом накопления повреждений в грунте.

С учетом введенных обозначений вариации работы внешних сил представим в векторном виде:

$$\delta \int_t A dt = \int_t Q^{I(n)} \delta Y^{(n)} dt \Big|_x + \int_t \int_x Q^{II(n)} dY^{(n)} dx dt. \tag{24}$$

Подставляя векторные выражения вариации кинетической (12), потенциальной (19) энергий и работы внешних сил (24) в вариационный принцип (7), получим:

$$\begin{aligned}
&\int_t \int_x \left\{ \tilde{A} \frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl}) Y^{(n)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + (C^{yn} - C^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (D^{yn} - D^{nl}) Y^{(n)} + Q^{II(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dx dt + \\
&+ \int_t \left\{ (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl}) Y^{(n)} + Q^{I(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dt \Big|_x + \int_x \tilde{A} \frac{dY^{(n)}}{dt} E \delta Y^{(n)} dx \Big|_t = 0.
\end{aligned}$$

Из этого вариационного уравнения получаем следующую краевую задачу:

$$\tilde{A} \frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl}) Y^{(n)} \right] + (C^{yn} - C^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (D^{yn} - D^{nl}) Y^{(n)} + Q^{II} = 0; \tag{25}$$

$$\left\{ (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl}) Y + Q^{ep} \right\} \delta Y \Big|_x = 0; \quad \tilde{A} \frac{dY^{(n)}}{dt} E \delta Y^{(n)} \Big|_t = 0. \tag{26}$$

Здесь квадратичные матрицы девятого порядка  $A, B, C, D$ , векторы внешних сил девятого порядка  $Q^H$  и  $Q^{ep}$  и коэффициенты имеют следующей вид:

$$(a_{ij} = a_{ij}^{yn} - a_{ij}^{nl(n)}, \quad b_{ij} = b_{ij}^{yn} - b_{ij}^{nl(n)}, \quad c_{ij} = -b_{ij}, \quad d_{ij} = d_{ij}^{yn} - d_{ij}^{nl(n)}).$$

## 5. Уравнения равновесия

Учитывая (17) из вариационного уравнения (25), имеем следующую систему дифференциальных уравнений равновесия стержня при переменных нагружениях с граничными условиями в векторной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A^{yn} - A^{nl(k)}) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl(k)}) Y^{(k)} \right] + (C^{yn} - C^{nl(k)}) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + (D^{yn} - D^{nl(k)}) Y^{(k)} = P^{(k)} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( A^{nl(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} + B^{nl} Y^{0(k-1)} \right) + C^{nl(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} + D^{nl(k)} Y^{0(k-1)} + \\ + \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ A^{nl(k-m)} \frac{\partial (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)})}{\partial x} + B^{nl(k-m)} (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)}) \right] + \right. \\ \left. + C^{nl(k-m)} \frac{\partial (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)})}{\partial x} + D^{nl(k-m)} (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)}) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \left\{ (A^{yn} - A^{nl(k)}) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl(k)}) Y^{(k)} - \bar{Q}^{(k)} - B^{nl(k)} Y^{(k)} - A^{nl(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{k-1} \left[ A^{nl(k-m)} \frac{\partial (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)})}{\partial x} + B^{nl(k-m)} (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)}) \right] \right\} \delta Y^k \Big|_r = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $Y^{(k)}$  – искомые векторы функции девятого порядка в текущих координатах.

Выражения внутренних усилий и моментов в векторной форме можно представить в виде

$$P^{(n)} = \frac{3Gh_0 I_0}{l^3} \left\{ \begin{pmatrix} \sim y^n & \sim nl(n) \\ A & -A \end{pmatrix} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \begin{pmatrix} \sim y^n & \sim nl(n) \\ B & -B \end{pmatrix} Y^{(n)} \right\}, \quad (29)$$

где  $P^{(n)}$  – вектор функции двенадцатого порядка, равный

$$P^{(n)} = \{N_x^{(n)}, M_y^{(n)}, M_z^{(n)}, M_\varphi^{(n)}, M_{a_1}^{(n)}, M_{a_2}^{(n)}, Q_1^{(n)}, M_x^{(n)}, Q_2^{(n)}, Q_{a_1}^{(n)}, Q_{a_2}^{(n)}, M_{\bar{\varphi}}^{(n)}\}.$$

Матрицы  $\tilde{A}^{yn}, \tilde{A}^{nl(n)}, \tilde{B}^{yn}, \tilde{B}^{nl(n)}$  квадратной матрицы двенадцатого порядка и элементы описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \quad \tilde{a}_{10,s} = b_{s,5}; \quad \tilde{a}_{11,s} = b_{s,6}; \quad \tilde{a}_{12,s} = b_{s,4}; \quad \tilde{b}_{ij} = b_{ij}, \\ \tilde{b}_{10,r} = d_{2,s}; \quad \tilde{b}_{11,r} = d_{r,6}; \quad \tilde{b}_{12,r} = d_{r,4}; \quad (i, j = 1, 2, \dots, 9; s = 7, 8, 9; r = 2, 3, 4, 5, 6; ) \end{aligned}$$

Для решения краевой задачи используется метод конечных разностей и метод упругих решений. В процессе их аппроксимации применяется центральная разностная схема второго порядка точности [15, 16].

Векторное уравнение (27) после применения разностей схемы получает вид

$$(A_i^{yn} - A_i^{nl(k)}) Y_{i+1}^{(k)} - (B_i^{yn} - B_i^{nl(k)}) Y_i^{(k)} + (C_i^{yn} - C_i^{nl(k)}) Y_i^{(k)} = \bar{Q}_i^{(k)} + \bar{Q}_i^{nl} + \bar{Q}^{nl0} \delta(A - \Pi) = 0. \quad (30)$$

Для решения сформулированных алгебраических уравнений (30) с соответствующими граничными условиями используется метод прогонки с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$V_i = \alpha_i V_{i+1} + \beta_i; \quad i = N-1, \dots, 1. \quad (31)$$

Здесь  $\alpha_i = (B_i - C_i \alpha_{i-1})^{-1} A_i$ ;  $\beta_i = (B_i - C_i \alpha_{i-1})^{-1} (C_i \beta_{i-1} - F)$ ;  $i = 1, 2, \dots, N-1$ .

## 6. Результаты расчета и анализ

В качестве примера приведем результаты расчета тонкостенных стержней прямоугольного поперечного сечения, защемленного по торцам при знакопеременном нагружении с учетом накопления повреждений [17–19]. За кинетическое уравнение принято  $\frac{d\eta}{dn} = A(1-\gamma_1\eta)^{-\beta}(\bar{\sigma}_u^{(k)})^\alpha$ . Задача решена при следующих исходных данных: материальные константы кинетического уравнения повреждаемости:  $A=1.2 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha=\beta=5$ ;  $\gamma_1=0.8$ ;  $\alpha_1=0.97$ ;  $B=1.4 \cdot 10^3$ ;  $\varepsilon_s=0.0015$ . За внешнюю нагрузку приняты следующие значения:  $f_0^+ = 25$ ;  $f_0^- = 50$ ;  $\bar{f}_0^+ = 10$ ;  $\bar{f}_0^- = 5$ ; (кг/см<sup>2</sup>);  $\alpha = \pi/3$ ;  $\alpha^* = \pi/2$ ;  $\gamma = \pi/4$ ;  $\gamma^* = \pi/6$ . В таблице приводятся численные результаты вектора перемещений (в безразмерном виде) в зависимости от числа итераций  $\gamma$  и  $k$  (при  $N=40$ ,  $k=2$  и  $k=10$ ).

Максимальные значения компонентов вектора перемещений  
на основе различных диаграмм деформирования

| $k=2$                            |                                    |                                  | $k=10$                           |                                    |                                  |
|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| модель Мазинга<br>( $\gamma=4$ ) | модель Гусенкова<br>( $\gamma=4$ ) | модель Буриева<br>( $\gamma=5$ ) | модель Мазинга<br>( $\gamma=3$ ) | модель Гусенкова<br>( $\gamma=3$ ) | модель Буриева<br>( $\gamma=4$ ) |
| $W^{(k)}(0.5)$                   |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| 0.274187                         | 0.274189                           | 0.274398                         | 0.274144                         | 0.274132                           | 0.274375                         |
| $\alpha_1^{(k)}(0.3)$            |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| 0.722022                         | 0.722027                           | 0.722560                         | 0.721904                         | 0.721872                           | 0.722499                         |
| $\beta_1^{(k)}(0.1)$             |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| 0.019853                         | 0.019854                           | 0.019871                         | 0.019851                         | 0.019851                           | 0.019869                         |
| $V^{(k)}(0.5)$                   |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| 0.257083                         | 0.257084                           | 0.257279                         | 0.257043                         | 0.257030                           | 0.257261                         |
| $\alpha_2^{(k)}(0.3)$            |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| 0.676963                         | 0.676968                           | 0.677462                         | 0.676851                         | 0.676819                           | 0.677415                         |
| $\beta_2^{(k)}(0.1)$             |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| 0.018617                         | 0.018618                           | 0.018634                         | 0.018615                         | 0.018615                           | 0.018632                         |
| $U^{(k)}(0.5)$                   |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| 0.001720                         | 0.001720                           | 0.001721                         | 0.001719                         | 0.001719                           | 0.001721                         |
| $\theta^{(k)}(0.1)$              |                                    |                                  |                                  |                                    |                                  |
| -0.001308                        | -0.001308                          | -0.001310                        | -0.001307                        | -0.001306                          | -0.001309                        |

На рис.1, 2 показаны зоны пластичности и поврежденности соответственно для поперечного сечения  $x=0$ ;  $x=0.5$  при  $k=2$  (a, b) и при  $k=10$  (c, d).

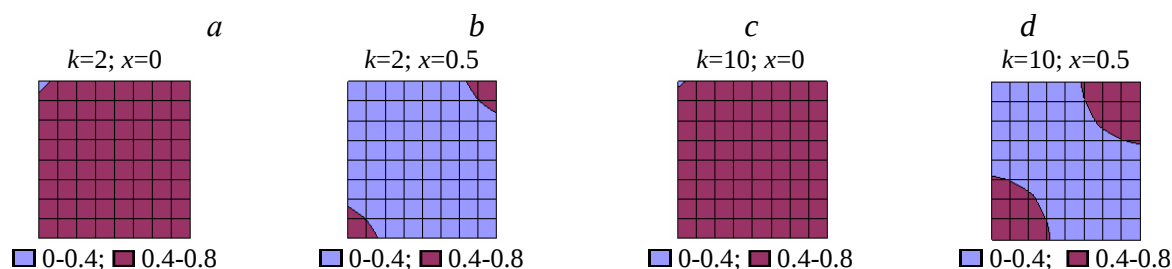


Рис.1. Кинетика изменения зоны пластичности

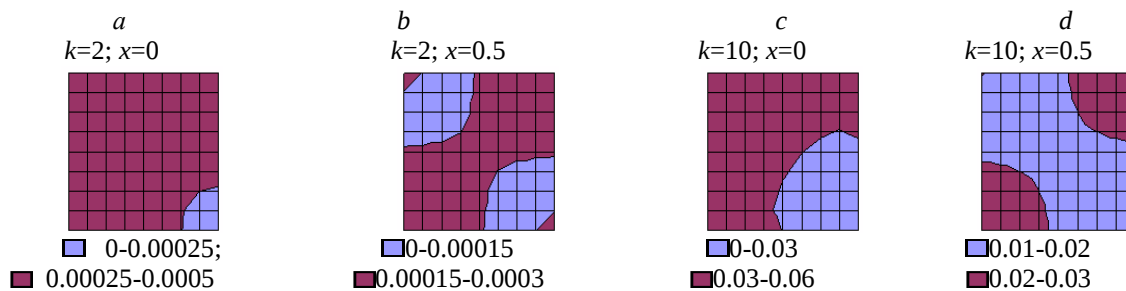


Рис.2. Кинетика изменения зоны поврежденности

На рис.3 приведены значения расчетных величин  $W^{(k)}$  и  $\alpha_1^{(k)}$ , полученные с учетом вторичных пластических деформаций и упругой разгрузки. Заметим, что остаточные расчетные величины существенно отличаются от величин, подсчитанных по теореме упругой разгрузки.

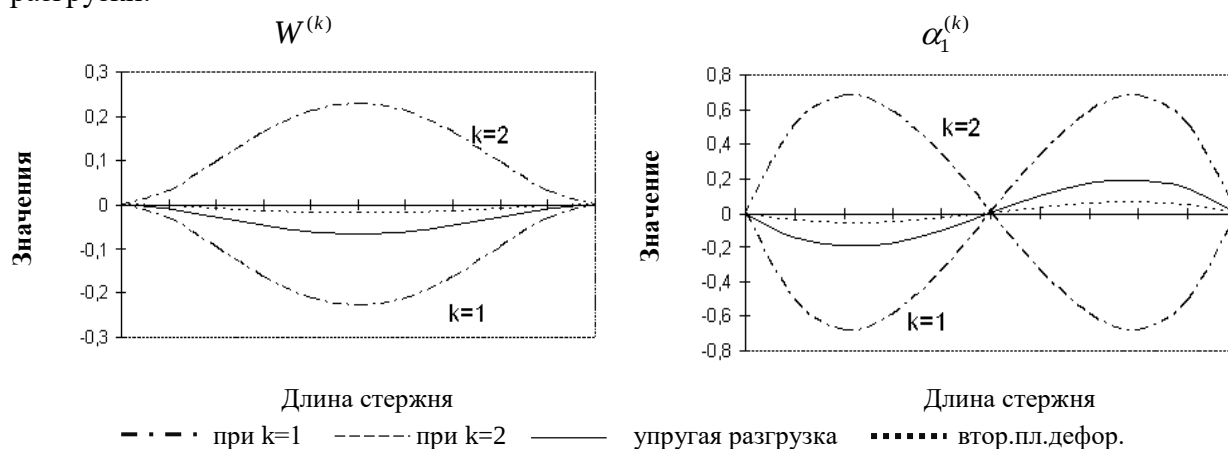


Рис.3. График вектора перемещений  $W^{(k)}$  и  $\alpha_1^{(k)}$

## 7. Заключение

На основе вариационного принципа получена система дифференциальных уравнений движения (равновесия) тонкостенных стержней и сформулированы краевые задачи при повторно-переменном нагружении. Исследовано напряженно-деформированное состояние стержней при переменном нагружении с учетом обобщенного принципа Мазинга и повреждаемости материала. При этом показано влияние циклических диаграмм деформирования на расчет искомых величин, а также влияние вторичных пластических деформаций и упругой разгрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А.А. Труды. Пластичность. М: Логос, 2004. – 376 с.
- [2] Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. –344 с.
- [3] Троценко В.Т., Лебедев А.А. и др. Механическое поведение материалов при различных видах нагружений. Киев, 2000. –571 с.
- [4] Гусенков А.П., Москвитин Г.В., Хорошилов В.Н. Малоцикловая прочность оболочечных конструкций. М.: Наука, 1989. –254 с.
- [5] Киселев А.Б. Модели необратимого динамического деформирования и микроразрушения повреждаемых сред //Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 381–383.
- [6] Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. –215с.
- [7] Бондарь В.С. Термовязкопластичность. Теория и эксперимент // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Московского университета, 2011. С.122–128.
- [8] Бровко Г.Л. Понятия образа процесса и пятимерной изотерапии свойств материалов при конечных деформациях // Докл.РАН. 1989. Т.308. №3. С.565–570.

- [9] *Абиров Р.А.* Развитие математической модели пластичности с учетом деформирования материалов при сложном нагружении: Автореф. дис...докт. физ.-мат. наук. Ташкент.: 2014. –52 с.
- [10] *Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Вязкоупругопластический трехслойный стержень при термосиловых нагрузках // МТТ. Изв. РАН. 1998. № 3. С. 109–116.
- [11] *Буриев Т.* Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций. Ташкент: Фан, 1986. – 244с.
- [12] *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. Ташкент: Фан, 1966. –394 с.
- [13] *Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х.* Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Фан, 1985. 152с.
- [14] *Рашидов Т.Р., Юлдашев Т., Маткаримов А.Х.* Модели сейсмодинамики подземных сооружений при пространственном нагружении // Вестник ТашИИТ, 2006. № 1. С. 66–74.
- [15] *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973. –400 с.
- [16] *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи.Методы.Примеры. М.: Наука, 2001. –316 с.
- [17] *Рашидов Т.Р., Абдусаттаров А., Исомиддинов А.И.* Моделирование процессов пластического деформирования и повреждаемости тонкостенных стержней при пространственно - переменном нагружении // Докл. АН РУз. 2011. №4. С. 35–38.
- [18] *Абдусаттаров А., Юлдашев Т., Рузиева Н.Б.* К расчету магистральных трубопроводов при переменном нагружении с учетом упругопластических деформаций // Матер. Респуб. науч.-тех. конференции. ТашИИТ. 2009. С. 138–142.
- [19] *Абдусаттаров А., Маткаримов А.Х., Хайдаров А.Х.* Моделирование подземных трубопроводов при пространственных нагружениях с учетом вязкоупругого взаимодействия // Вестник ТашИИТ. 2012. №3-4. С. 12–14.

Дата поступления  
31.05.2021

***Абдусаттаров А., Исомиддинов А.И., Рузиева Н.Б. Такрорий юкланишлар таъсиридаги юққа деворли эластик-пластик стерженларни емирилишни ҳисобга олган ҳолда ҳисоблаш***

***Аннотация:*** Мақолада умумлашган Мазинг-Москвитин принципи ва материалнинг емирилишни эътиборга олган ҳолда юққа стерженларни фазовий-такрорий юкланишлар таъсирида ҳисоблашни математик модели келтирилган. Деформацияланиш назарияси ва Гамильтон-Остроградский принципига асосан такрорий юкланишлар таъсирида бўлган стержен учун ҳаракат (мувозанат) дифференциал тенгламалар системаси олинган ва чегаравий масалалари ифодаланган. Қўндаланг кесими тўғри тўртбурчакдан иборат бўлган стерженни юкланишлар таъсирида емирилишни эътиборга олган ҳоли учун ҳисоб натижалари олинган. Қўчишни ташиқил этувчиларини сонли натижалари итарация сонига ва юкланишлар циклига боғлиқлиги турли хил деформацияланиш диаграммаси асосида келтирилган. Иккиламчи пластик деформация ва эластик юксизланиш таъсирининг график кўриниш кўрсатилган.

***Калит сўзлар:*** элстиклик; пластиклик; емирилиш; такрорий юкланиш; вариацион принцип.

***Abdusattarov A., Isomiddinov A.I., Ruzieva N.B. Elastoplastic calculation of thin-walled rods at variable load considering the Masing principle and damage***

***Abstract:*** The article presents mathematical models for calculating thin-walled rods under spatially variable loading, taking into account the generalized Masing-Moskvitin principle and material damage. On the basis of the deformation theory and the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, a system of differential equations of motion (equilibrium) under variable loading is obtained and boundary value problems are formulated. The results of calculating thin-walled rectangular rods under alternating loading taking into account the accumulation of damage are presented. The numerical results of the displacement components depending on the number of iterations and loading cycles are presented on the basis of various deformation diagrams. The account of the influence of secondary plastic deformations and elastic unloading is shown graphically.

***Keywords:*** elasticity; plasticity; damageability; variable loading; variational principle.

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОЛЕБАНИЕ ГРУНТОВОЙ ПЛОТИНЫ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

Буриев А.Т.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан*  
E-mail: [abdulaziz.bt@inbox.ru](mailto:abdulaziz.bt@inbox.ru)

**Аннотация.** В статье представлены математическая постановка и алгоритм численного решения нестационарной задачи для грунтовой плотины в плоской упругой постановке методом конечных разностей. Для проверки предложенной методики и алгоритма программы приводится решение тестовой задачи (задача Лемба). Численным методом конечных разностей решена задача по исследованию напряженного состояния высокой Чарвакской грунтовой плотины, при сдвиговом воздействии по основанию (типа сейсмограммы). Результаты решения представляются в виде распределения линий равных перемещений, напряжений по телу плотины в зависимости от времени. При этом выявлены наиболее уязвимые зоны рассматриваемой грунтовой плотины.

**Ключевые слова:** грунтовая плотина; метод конечных разностей; явная схема; напряжение; смещение; сейсмограмма.

### 1. Введение

Обеспечение сейсмостойкости гидротехнических сооружений является важнейшей задачей, которую необходимо учитывать при проектировании, строительстве и эксплуатации гидроузлов, так как возможное разрушение этих сооружений при землетрясении может привести к катастрофическим последствиям и гибели людей. Сейсмическая безопасность грунтовых или насыпных плотин сильно обусловлена постоянными перемещениями, вызванными землетрясениями.

Грунтовые плотины в настоящее время являются одним из основных типов водоподпорных сооружений, возводимых в районах с высокой сейсмичностью. Особенности конструкций и методы возведения таких плотин, учет упругопластических и вязких свойств грунтов сооружения и основания вызывают значительные математические трудности при определении напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости этих сооружений. Указанные обстоятельства еще более усложняют решение задачи при сейсмических воздействиях. На предварительных этапах проектирования сооружений целесообразно использовать сравнительно простые, достоверные инженерные методики, которые должны учитывать основные положения волновой теории сейсмостойкости. Однако до настоящего времени в технической литературе отсутствуют сведения о подобных методиках. Поэтому разработка инженерной методики расчета плотин из грунтовых материалов при сейсмических воздействиях на основе волновой теории сейсмостойкости является актуальной задачей.

В настоящее время расчет гидротехнических сооружений на действие сейсмических нагрузок производится в соответствии с ШНК [1], в основе которого рассматривается упругое деформирование конструкций. Расчет прочности элементов сооружения производится по предельным усилиям, воспринимаемым элементом в нормальных, наклонных и пространственных сечениях. При этом вводятся специальные коэффициенты условий работы, учитывающие особенности сейсмического воздействия.

Подробный обзор известных работ, а также проведенные исследования динамического поведения и НДС высоких грунтовых плотин с учетом линейных и нелинейных упругих и вязкоупругих свойств грунта и конечных деформаций приводится в работах [2–3]. Рассмотрены колебания сооружений в дорезонансном, резонансном и пострезонансном режимах.

Наряду с этим в работах зарубежных исследователей [4–8] отводится особое место решению конкретных задач, связанных с оценкой НДС и динамического поведения грунтовых плотин с учетом различных факторов.

В монографии [9] в общедоступной форме описываются явления, при воздействии которых получают повреждение и разрушение водохозяйственные объекты или их составные части. Проанализированы основные причины повреждения и дана оценка техническому состоянию комплекса гидротехнических сооружений республики.

Руководствуясь указанным, исполнители работы использовали плоскую расчетную модель, представляющую поперечное сечение грунтовой плотины, находящейся на основании из алевролита. В качестве метода расчета был выбран метод конечных разностей.

Для проведения динамических расчетов необходимо задать инерционные и упругодемпфирующие свойства гидротехнического сооружения и сейсмическое воздействие в виде акселерограммы колебаний основания. Так как параметры воздействия являются случайными величинами, поэтому единичный расчет сооружения на действие, заданное акселерограммой землетрясения, следует рассматривать как реализацию случайного процесса. Наиболее естественным является путь использования не одной, а нескольких расчетных акселерограмм (пакета акселерограмм), принимая в качестве расчетных усилий их максимальные значения.

При расчете конструкции на пакет акселерограмм последний должен удовлетворять целому ряду требований. В самом общем случае к числу этих требований относятся:

- а) отсутствие серьезных искажений в расчетных акселерограммах;
- б) учет корреляции между расчетной балльностью, амплитудой и преобладающей частотой воздействия.

Эти требования жесткие и проведение расчетов трудоемкое. Поэтому определенное распространение получили динамические расчеты, в которых в качестве воздействия принимается короткий временной процесс и в расчетах использована модель сейсмического воздействия, предложенная И. Л. Корчинским [10]:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = A e^{-st} \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $A$  – максимум ускорения;  $\omega$  – преобладающая частота воздействия.

При проведенных расчетах в качестве воздействия по основанию плотины принят закон изменения перемещений в горизонтальном направлении (сейсмограмма) в виде

$$u_0 = \frac{A}{(\omega^2 + s^2)^2} \left( e^{-st} (s^2 \sin(\omega t) - \omega^2 \sin(\omega t) + 2\omega s \cos(\omega t)) - 2\omega s \right) \quad (2)$$

которая соответствует модели (1), т.е. дважды продифференцировав выражение (2), получим (1).

Изменение по времени перемещения (сейсмограмма) основания показана на рис. 1, согласно формуле (2).

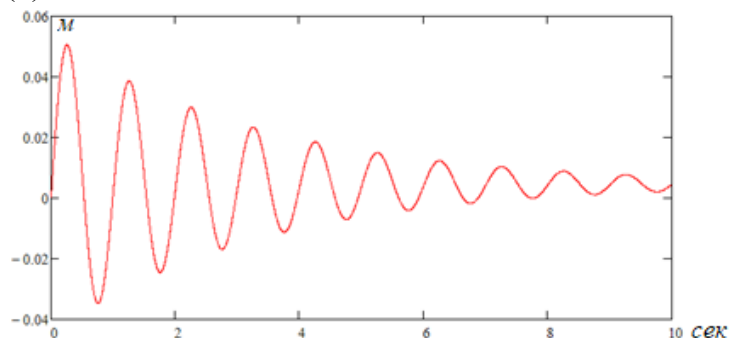


Рис. 1. Зависимость горизонтального перемещения точек основания плотины по времени

Амплитуда ускорения по формуле В.Л. Корчинского в [10] в расчетах принята  $A=0.2g$ ,  $s=0.3$ , что соответствует 8 - балльному землетрясению.

На предварительных стадиях проектирования для приближенных расчетов необходимо знать динамические модули сдвига  $G_d$ , модуль упругости  $E_d$ , коэффициент Пуассона  $\nu_d$ , отвечающие условиям сильных землетрясений (частота  $f=0.5-10$  Гц, амплитуда деформации  $\epsilon=10^{-4}-10^{-2}$ ). Значения  $G_d$ ,  $E_d$ ,  $\nu_d$  вычисляются по формулам теории упругости (3) – (5) на основе определенных сейсморазведкой значений скорости продольных  $V_p$  и поперечных  $V_s$  волн и значению плотности  $\rho$ , определенному экспериментально в лаборатории или в поле:

$$G_d = \rho V_s^2, \quad (3)$$

$$E_d = 2\rho V_s^2(1 + \nu_d), \quad (4)$$

$$\nu_d = \frac{V_p^2 - 2V_s^2}{2(V_p^2 - V_s^2)}. \quad (5)$$

При подстановке в формулы (3–5) величины  $\rho$  в кг/м<sup>3</sup>, а  $V_p$  и  $V_s$  в м/с значения  $G_d$  и  $E_d$  получаются в Па [1]. Исследованию динамического поведения различных грунтовых плотин при нагрузках посвящена работа [3], где рассмотрены собственные и вынужденные колебания грунтовых плотин с учетом упругих и вязкоупругих свойств материала сооружения и основания. Задачи решены в плоской постановке методом конечных элементов. Методом конечных разностей решены задачи напряженно-деформированного состояния грунтовой плотины при динамическом воздействии с учетом упругопластических свойств грунта в плоской постановке в рамках волновой постановки [11] по схеме Уилкинса. В предложенной статье приведены методика, алгоритм и решение нестационарной задачи по определению напряженно-деформированного состояния для грунтовой плотины в плоской упругой постановке численным методом конечных разностей.

## 2. Постановка задачи и метод решения

Статическое и динамическое поведение грунта сооружения описывается с использованием соотношений теории упругости. Учитываются объемные силы собственного веса грунта, гидростатического взвешивания и фильтрационные силы. Статические и динамические напряжения определяются решением динамической задачи плоской деформации. Эти напряжения могут определяться независимо и затем суммируются. Возможности нарушения сейсмостойкости плотины (либо сравнительная оценка различных конструктивных решений) оцениваются по наличию (либо размерам) зон предельного состояния грунта, которое определяется условием прочности Кулона Мора:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3 + \frac{2c}{\tan \varphi}) \sin \varphi, \quad (6)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  – минимальные и максимальные значения главных напряжений;  $\varphi$  – угол внутреннего трения;  $c$  – сила сцепления.

Уравнения движения грунтовой плотины записывается основными уравнениями механики сплошных сред и в плоской постановке имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho$  – плотность грунта  $u$ ;  $v$  – проекции вектора смещения на оси координат  $x$ ;  $y$ ;  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  – нормальные и касательные напряжения.

Связь между деформациями и смещениями определяется соотношениями Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{8}$$

Определяющие уравнения, связывающие тензора напряжений и деформаций, выражаются законом Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy},\end{aligned}\tag{9}$$

где  $E$  – модуль линейной деформации  $\nu$  – коэффициент Пуассона грунта плотины.

Граничные условия на поверхности верхового откоса

$$\begin{aligned}p_x &= \sigma_{xx}l_1 + \tau_{xy}m_1, \\ p_y &= \tau_{xy}l_1 + \sigma_{yy}m_1.\end{aligned}\tag{10}$$

где  $p_x, p_y$  – компоненты напряжений от гидростатического давления на поверхности верхового откоса,  $l_1, m_1$  – направляющие косинусы площади верхового откоса. При отсутствии гидростатического давления эти компоненты напряжения  $p_x, p_y$  равны нулю.

Граничные условия на гребне плотины

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 0, \\ \sigma_{yy} &= 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Граничные условия на поверхности низового откоса

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}l_2 + \tau_{xy}m_2 &= 0, \\ \tau_{xy}l_2 + \sigma_{yy}m_2 &= 0,\end{aligned}\tag{12}$$

где  $l_2, m_2$  – направляющие косинусы площади низового откоса.

На основании грунтовой плотины задается закон изменения смещения (сейсмограмма) или ускорения по времени (акселерограмма).

В начальный момент времени ( $t=0$ ) смещения и скорости на всей области грунтовой плотины равны нулю:

$$\begin{aligned}u &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ v &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  через компоненты напряжений  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}, \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).\end{aligned}\tag{14}$$

Задача решается методом конечных разностей с использованием явной схемы. Расчетная область грунтовой плотины разбивается условно на три области, по горизонтали (ось  $x$ ) верховая упорная призма – шагом  $hx1$ , гребень плотины – шагом  $hx2$ , низовая упорная призма шагом  $hx3$  и по вертикали – шагом  $hy$  (рис. 2).

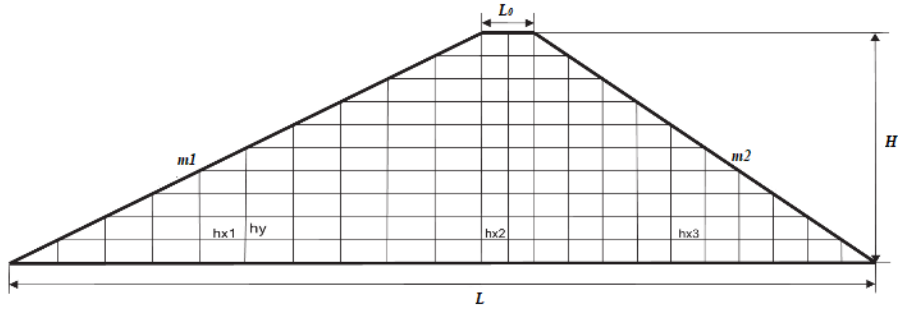


Рис. 2. Разбиение расчетной области плотины

В разработанном алгоритме решения задачи перемещения вычисляются в узлах с целыми номерами сетки, а деформации и напряжения вычисляются в узлах с полуцелыми номерами сетки. При дискретизации плотины используется неравномерная сетка по плоскости. Тензоры деформации (8) и напряжения (9) вычисляются в узлах полуцелыми индексами.

Обозначим через  $F_{i,j}^k$  значение сеточной функции в точке с координатами  $x_i=ih$ ,  $y_j=jh$  в момент времени  $t=k\tau$  ( $\tau$  – шаг по времени  $h\tau$ ,  $h$  – шаг по пространству), тогда компоненты тензора деформации для внутренних узлов расчетной области при  $(i+1/2, j)$  в момент  $k\tau$  в разностном виде запишется

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx,i+1/2,j}^k &= \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{hx}, \quad \varepsilon_{yy,i+1/2,j}^k = \frac{v_{i+1,j+1}^k + v_{i,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k - v_{i,j-1}^k}{4hy}, \\ \varepsilon_{xy,i+1/2,j}^k &= \frac{u_{i+1,j+1}^k + u_{i,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i,j-1}^k}{4hy} + \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i,j}^k}{hx}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для узла  $(i, j+1/2)$  в момент  $k\tau$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx,i,j+1/2}^k &= \frac{u_{i+1,j+1}^k + u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i-1,j}^k}{4hx}, \quad \varepsilon_{yy,i,j+1/2}^k = \frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j}^k}{hy}, \\ \varepsilon_{xy,i,j+1/2}^k &= \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{hy} + \frac{v_{i+1,j+1}^k + v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i-1,j}^k}{4hx}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $hx$  принимают значения на верховой упорной призме  $hx=hx1$ , на гребне плотины  $hx=hx2$ , на низовой упорной призме  $hx=hx3$ .

Подставляя (15) и (16) в (9), получим формулы вычисления для компонент напряжений в разностном виде.

При вычислении деформации на контурах верхового откоса, на свободной поверхности гребня и на контуре низового откоса участвуют законтурные перемещения, т.е. фиктивные перемещения. Эти фиктивные перемещения определяются из граничных условий (10) – (12).

Приведем выражения для вычисления фиктивных перемещений законтурных узлов на верховом откосе. Так как в задаче не учитывается давление воды на верховой откос, т.е.  $p_x = p_y = 0$ , из условия (10) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \sigma_{xx} d_1^2, \\ \tau_{xy} &= -\sigma_{xx} d_1 \end{aligned} \quad (17)$$

где  $d_1 = l_1/m_1$ .

В равенство (17), подставив закон Гука (9) и соотношения Коши (8), определяем первые производные от перемещений  $u, v$  по координате  $y$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = D_{11} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (18)$$

$$\text{где } D_{11} = \frac{d_1^2(\lambda + 2G) - \lambda}{\lambda + 2G - \lambda d_1^2}, \quad D_{21} = -\frac{d_1(\lambda + 2G + \lambda D_{11})}{G}, \quad \lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu}.$$

Воспользуемся центральными разностями аппроксимации первых производных второго порядка погрешности и из выражения (18) получим выражение для определения законтурных перемещений

$$v_{i,j+1}^k = 2hy \left( D_{11} \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2hx1} \right) + v_{i,j-1}^k, \quad u_{i,j+1}^k = 2hy \left( D_{21} \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2hx1} - \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2hx1} \right) + u_{i,j-1}^k, \quad (19)$$

$i=j, j=1, \dots, J1-1, k=1, \dots, K.$

Для низового откоса из граничного условия (12) аналогично (19) получим

$$v_{i,j+1}^k = 2hy \left( D_{12} \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2hx3} \right) + v_{i,j-1}^k, \quad u_{i,j+1}^k = 2hy \left( D_{22} \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2hx3} - \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2hx3} \right) + u_{i,j-1}^k, \quad (20)$$

$i=I2+j, j=1, \dots, J1-1, k=1, \dots, K$

$$\text{где } d_2 = l_2 / m_2, \quad D_{12} = \frac{d_2^2(\lambda + 2G) - \lambda}{\lambda + 2G - \lambda d_2^2}, \quad D_{22} = -\frac{d_2(\lambda + 2G + \lambda D_{12})}{G}.$$

Из граничного условия на гребне плотины (11) и закона Гука (9) получим формулу для вычисления нормального напряжения  $\sigma_{xx}$

$$\sigma_{xx} = \frac{4G(\lambda + G)}{\lambda + 2G} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (21)$$

и на гребне плотины нет необходимости вычисления законтурных фиктивных перемещений. На контуре гребня плотины в узлах с полуцелыми номерами сетки известны касательные напряжения  $\tau_{xy}$ , нормальные напряжения  $\sigma_{yy}$ . Они равны нулю, а  $\sigma_{xx}$  определяется из (21). В конечных разностях он имеет вид

$$\sigma_{xx,i+1/2,j}^k = \frac{4G(\lambda + G)}{\lambda + 2G} \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{hx2},$$

где  $i=I1, \dots, I2-1, j=J1, k=1, \dots, K.$

После этого решается конечно-разностное уравнение движения плотины, которое для каждой области имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{(u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}))}{\tau^2} &= \frac{\sigma_{xx,i+1/2,j}^k - \sigma_{xx,i-1/2,j}^k}{hx} + \frac{\sigma_{xy,i,j+1/2}^k - \sigma_{xy,i,j-1/2}^k}{hy}, \\ \rho \frac{(v_{i,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^k + v_{i,j}^{k-1}))}{\tau^2} &= \frac{\tau_{yx,i+1/2,j}^k - \tau_{yx,i-1/2,j}^k}{hx} + \frac{\sigma_{xy,i,j+1/2}^k - \sigma_{xy,i,j-1/2}^k}{hy}, \end{aligned} \quad (22)$$

где в каждой области плотины шаг по горизонтали  $hx$  в формулах (15) – (16) принимает значение соответственно  $hx1$ ,  $hx2$ , и  $hx3$  с граничными условиями (10) – (12), с начальными условиями (13) и определяют перемещения в узлах плотины для каждого момента времени. Из разностного уравнения (22) видно, что в нем участвует три слоя по времени, и, чтобы написать уравнение в каждом узле  $(i, j)$  для двух компонент перемещения, нужно вычислить напряжения в четырех узлах полуцелыми индексами.

Разностное уравнение (22) аппроксимирует уравнение движения грунта (7) с порядком  $O(\tau^2, hx^2, hy^2)$ . Условием устойчивости схемы является условие  $(\tau \leq h/c_1)$ , где  $h = \min(hx, hy)$ .

### 3. Результаты

Для проверки сходимости, устойчивости схемы и определения времени перехода нестационарного решения к установившемуся состоянию решается задача действия равномерно распределенной вертикальной динамической нагрузки на конечном отрезке свободной поверхности полупространства (задача Лемба). Численное решение сопоставляется со статическим решением, полученным В.Новацким [12].

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$  упругая среда занимает полупространство  $y \geq 0$  и с момента  $t=0$  на плоской границе плоскости  $xOz$  начинает действовать равномерно распределенная вертикальная нагрузка  $q(x, t)$ , в конечном отрезке  $-a \leq x \leq a$ , не зависящее от  $z$  (рис.3).

Эта нагрузка вызывает в полупространстве плоское напряженно-деформированное состояние и поэтому задача решается в плоской постановке.

Как известно, уравнения движения среды в перемещениях для плоской задачи имеют вид (7). Начальные условия

$$\begin{cases} U = \dot{U} = 0 \\ V = \dot{V} = 0 \end{cases} \text{ при } t=0 \quad (23)$$

Граничные условия на свободной поверхности  $y=0$  имеют вид

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \sigma_0 H(t), & |x| \leq a, \end{cases} \quad (24)$$

$$\sigma_{yx} = 0,$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда;  $\sigma_0$  – амплитуда нагрузки.

Для единственности решения задачи необходимо поставить условие: при  $y \rightarrow \infty$  возмущение исчезает, т.е.  $U \rightarrow 0, V \rightarrow 0$ .

После аппроксимации центральными разностями производных в (7) уравнения движения в разностном виде имеют вид (22).

Аппроксимируя начальные условия (23), имеем

$$\begin{aligned} U^0_{i,j} &= 0, U^1_{i,j} = 0, \\ V^0_{i,j} &= 0, V^1_{i,j} = 0, \\ i &= \overline{1, I_3}, j = \overline{1, J_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Первые производные в граничных условиях (24) аппроксимируются центральными разностями и определяются перемещения фиктивных узлов, которые имеют вид:

для узлов  $1 \leq i \leq I_1 - 1, I_2 + 1 \leq i \leq I_3 - 1$

$$V^k_{i,0} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot (U^k_{i+1,1} - U^k_{i-1,1}) + V^k_{i,2}, \quad U^k_{i,0} = U^k_{i,2} + (V^k_{i+1,1} - V^k_{i-1,1}); \quad (26)$$

для узлов  $I_1 \leq i \leq I_2$

$$V^k_{i,0} = \frac{2h}{\lambda + 2\mu} \cdot (\sigma_0 + \lambda \frac{U^k_{i+1,1} - U^k_{i-1,1}}{2h}) + V^k_{i,2}, \quad U^k_{i,0} = U^k_{i,2} + (V^k_{i+1,1} - V^k_{i-1,1}). \quad (27)$$

На границе расчетной области узловые перемещения равны нулю.

В итоге мы получили замкнутую систему уравнений для определения узловых перемещений, которые определяют решения с погрешностью  $O(h^2 + \tau^2)$ .

Приведем формулы вычисления напряжений из [12]

$$\sigma_{xx}(x, y) = -q \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{y(x-\xi)^2}{[y^2 + (x-\xi)^2]^2} d\xi, \quad \sigma_{yy}(x, y) = -q \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{y^3}{[y^2 + (x-\xi)^2]^2} d\xi. \quad (28)$$

В динамической задаче на свободной поверхности упругого полупространства с момента  $t=0$  начинает действовать равномерно распределенная динамическая нагрузка и при  $t < 0$  полупространство находится в покое, т.е. в ненапряженном состоянии. Под действием этой нагрузки в полупространстве распространяются продольные и поперечные волны.

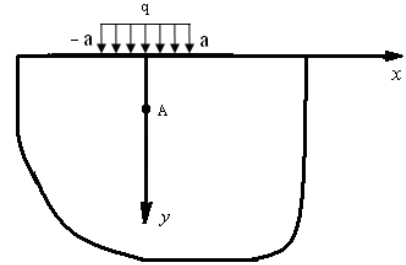


Рис 3. Действие равномерно распределенной динамической нагрузки на конечном отрезке свободной поверхности полупространства

Численные расчеты в динамической задаче проводились в безразмерных параметрах и приняты равными:  $\tau=0.05$ ,  $h=0.1$ ,  $c_1=1$ ,  $\sigma_0=1$ ,  $\nu=0.35$ ,  $a=1$ .

На рис. 4 приведены зависимость напряжения  $\sigma_{yy}$  от времени для точки  $x=0$ ,  $y=a=1$  (на рис. 3 обозначена буквой А), где сплошная кривая соответствует численному решению, пунктирная линия – статическому решению. Из рис. 4 видно, что при  $t > 7$  нестационарное решение мало отличается от статического. Расчеты показали, что с уменьшением шага сетки  $h$  сплошная кривая при  $t > 7$  приближается к пунктирной прямой линии.

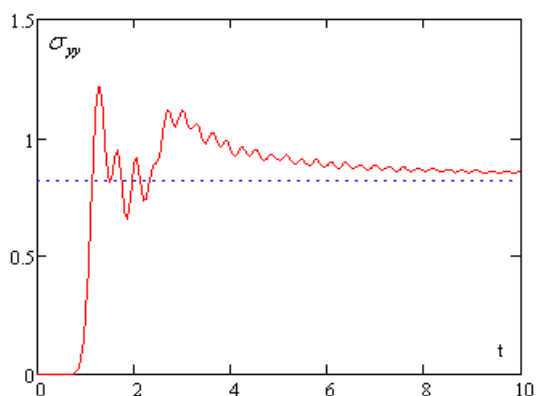


Рис. 4. Зависимость напряжения  $\sigma_{yy}$  от времени

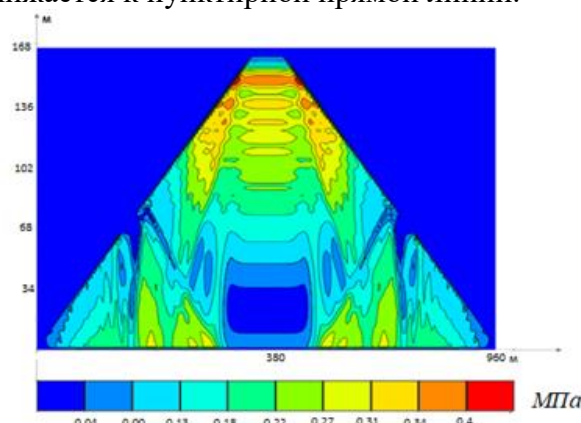


Рис. 5. Распределение максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$  (МПа) по телу плотины в момент времени  $t=0.3$  с при частоте  $f=1$  гц

Произведён динамический расчет Чарвакской плотины при сейсмическом воздействии по вышеуказанной методике.

При расчетах использована модель сейсмического воздействия (1), предложенная И. Л. Корчинским [5]. Допустим, что свойства грунта упорных призм и ядра плотины имеют одинаковые физико–механические характеристики, т.е. плотина однородная.

Решены конечно-разностные уравнения движения плотины (22) с граничными условиями (19), (20) и (21), с начальными условиями (13), записанными в конечных разностях. В качестве примера рассмотрена Чарвакская грунтовая плотина, что соответствует следующим геометрическим параметрам модели: высота  $H=168$  м; длина основания  $L=960$  м; ширина гребня  $L_0=12$  м; коэффициенты заложения откосов: верхового  $m_1=2.2$ , низового –  $m_2=2.2$ .

Расчетная область грунтовой плотины разбита по вертикали с шагом  $h_y=2$  м, по горизонтали: верховая упорная призма с шагом  $h_{x1}=4.4$  м, ядро  $h_{x2}=2$  м, низовая упорная призма шагом  $h_{x3}=4.4$  м. Численная сетка модели имеет 7476 узлов. Скорость распространения продольных волн в теле плотины  $V_p=1000$  м/с; коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ , плотность грунта принята  $\rho=1950$  кг/м<sup>3</sup>. Шаг по времени для расчета был принят  $t=0.001$  с, который удовлетворяет условию устойчивости расчета разностной схемы.

В качестве воздействия по основанию плотины принят закон изменения перемещений в горизонтальном направлении в виде (2) и в вертикальном направлении  $v_0=0$ , т.е. вертикальная составляющая отсутствует. В законе изменения возбуждающего ускорения (1) принято  $A=0.2g$ ,  $s=0.3$  который соответствует 8 - балльному землетрясению.

Расчеты выполнены при частотах  $f=1$  гц и  $f=5$  гц, которые присутствуют в частотном диапазоне сильных землетрясений и являются ключевыми параметрами многих строительных нормативов.

На рис. 5 показано распределение максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  в момент времени ( $t=0.3$  с) при частоте сейсмического воздействия  $f=1$  гц. В начальные моменты волнового процесса в теле плотины распространяется сдвиговая волна с большой

амплитудой. В результате отражения волн от верхового и низового откосов появляются вертикальные колебания малой амплитуды.

Отсюда видно, что при  $t=0.3\text{с}$  фронт сдвиговой волны проходит расстояние 160м (80х2м) по высоте плотины. Результаты проведенных вычислений также показали, что в нижней части упорных призм скорости частиц в горизонтальном направлении имеют отрицательное значение (-0.1м/с). Это свидетельствует о том, что частицы в этой части плотины изменили направления движения и его максимальное значение в момент  $t=0.3\text{с}$  равно 0.4 МПа возникает в области гребня плотины.

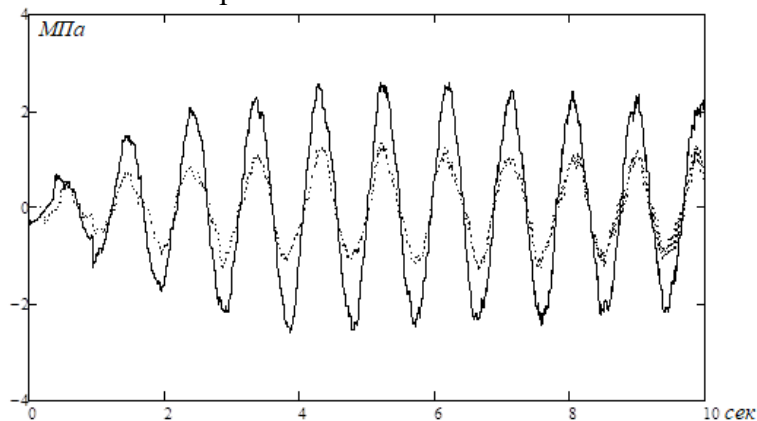


Рис. 6. Зависимость касательных напряжений от времени (сплошная линия – основания плотины; пунктирная линия–низовой откос) ( $y=2/3H$ ) при частоте воздействия  $f=1$  гц

На рис. 6 показана зависимость касательных напряжений  $\tau_{xy}$  (МПа) от времени в течение 10 с. Хотя значения касательных напряжений больше в основании плотины, чем напряжения в низовом откосе, но они менее опасны по сравнению с их значениями на низовом откосе.

#### 4. Обсуждение

Расчеты проведены в соответствии с действующими нормативными документами п.2.26 [2]: «При проектировании подпорных гидротехнических сооружений I–II классов в районах сейсмичностью свыше 7 баллов рекомендуется производить по волновой теории (ВТ) на воздействия, задаваемые записями (акселерограммами и др.) землетрясений». В отличие от других проведенных исследований [2–3] в этих расчетах используются записи землетрясений, определяемые в соответствии с указанными п.5.3 КМК [1], а также характеристики механических свойств грунтов.

#### 5. Заключение

Таким образом:

- разработана постановка и решена нестационарная задача для исследования напряженно-деформированного состояния конкретной грунтовой плотины с учётом геометрических и физико-механических параметров сооружения и грунта при сдвиговом сейсмическом воздействии;
- достоверность разработанной методики и алгоритма решения задачи доказана при сравнении с решением тестовой задачи (задача Лемба);
- результатами решения задачи явились распределение горизонтальных скоростей, нормальных, касательных и максимальных касательных напряжений в теле плотины при частоте сейсмического воздействия  $f=1$  гц и  $f=5$  гц, которые присутствуют в частотном диапазоне сильных землетрясений и являются ключевыми частотными параметрами многих строительных нормативов;
- для рассмотренного частного случая расчета плотины показано, что низкочастотные сейсмические воздействия наиболее неблагоприятны, чем высокочастотные. При этом

наиболее опасными с точки зрения возможности оползания грунта являются участки плотины – это гребень и откосы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *ШНК* 2.06.11. -04 Строительство в сейсмических районах. Гидротехнические сооружения. //Госархитектстрой. 2006. – 55 с.
- [2] *Мирсаидов М.М., Султанов Т.З.* Оценка напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин с учетом нелинейного деформирования материала и конечных деформаций //Инженерно-строительный журнал. 2014. №5. С.73–82.
- [3] *Мирсаидов М.М., Султанов Т.З.* Разработка теоретических основ для оценки динамики грунтовых плотин с учетом их взаимодействия с жидкостью и волновым уносом энергии от сооружения к основанию // Иригация и мелиорация. 2016. №2. С.32–38.
- [4] *Bao-Lin Xiong, Xi-Liang Wang and Chun-Jiao Lu.* Dynamic Reaction Analysis of Tailing Dams Under Earthquake // Advances in Environmental Geotechnics. 2010. No.6. P. 697–701.
- [5] *Siyahi B., Arslan H.* Nonlinear Dynamic Finite Element Simulation of Alibey Earth Dam // Environmental Geology. Vol. 54. 2008. No.1. P. 77–85.
- [6] *Bauer E., Fu Z.Z., Liu S.* Constitutive Modeling of Materials for Rockfill Dams // 6th International Conference on Dam Engineering. Lisbon, Portugal. February 15–17, 2011. P. 1–14.
- [7] *Bauer E., Fu Z.Z., Liu S.* Influence of Pressure and Density on the Rheological Properties of Rockfills // Frontiers of Structural and Civil Engineering. Vol. 6. 2012. Issue 1. P. 25–34.
- [8] *Матвиенко А.А.* Совершенствование методики расчета сейсмостойкости плотин из грунтовых материалов на основе волновой теории: Дис... канд. техн. наук. Харьков. 2015. –150 с.
- [9] *Ахмедов М.А., Салямова К.Д.* Анализ и оценка повреждений гидротехнических сооружений. Ташкент. Fan va texnologiya. 2016. – 160 с.
- [10] *Корчинский И.Л.* Сейсмостойкое строительство зданий. М.: Высшая школа, 1971. – 282 с.
- [11] *Султанов К.С., Салямова К.Д., Хусанов Б.Э.* Динамический расчет грунтовых плотин с учетом структурного изменения грунта // Проблемы развития транспортных и инженерных коммуникаций. М.: 2011. №1. С.37–40
- [12] *Новацкий В.* Теория упругости. М. 1975. – 872 с.

Дата поступления  
19.04.2021

#### **Буриев А.Т. Мустаҳкам асосли грунтли тўғонларнинг ностационар тебраниши**

**Аннотация:** Мақолада грунтли тўғон эластик муҳит деб қаралиб, тўғон учун ностационар текис масаланинг математик қўйилиши ва чекли айирмалар усули ёрдамида сонли ечим алгоритми келтирилган. Келтирилган алгоритм ва сонли усулни текшириш мақсадида тест масала (Лемба масаласи) ечими берилган. Баланд Чорвоқ тўғони асосидан силжитувчи кўчиш (сейсмограмма кўринишида) таъсирида, тўғондаги кучланганлик ҳолатини ўрганиш масаласи сонли чекли айирмалар усулида ечилган. Сонли ечим натижалари тўғонда кучланишларни вақтга боғлиқ равишда ўзгариши ва тўғон бўйлаб тақсимланиши эса, бир хил кучланишлар чизиқлари (изолиниялар) кўринишида келтирилган. Шу билан бирга тўғоннинг энг заиф соҳалари аниқланган.

**Калит сўзлар:** грунтли тўғон; чекли айирмалар усули; ошкор схема; кучланиш; кўчиш; сейсмограмма.

#### **Buriev A.T. Nonstationary vibration of an earth dam on a rigid base**

**Abstract:** The article presents a mathematical statement and an algorithm for the numerical solution by the method of finite differences of a nonstationary problem for an earth dam in a plane elastic formulation. To test the proposed methodology and program algorithm, a solution to a test problem (Lemba problem) is given. The problem of studying the stress state of a high Charvak earth dam, with a shear action along the base (as a seismogram), was solved by the numerical method of finite differences. The results of the solution are presented in the form of the distribution of lines of equal displacements, stresses along the body of the dam, depending on time. At the same time, the most vulnerable zones of the earth dam under consideration were identified.

**Keywords:** earth dam; finite difference method; explicit scheme; stress; displacement; seismogram.

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА С НЕОДНОРОДНЫМ КИПЯЩИМ СЛОЕМ

Абдурахимов А., Холиков Д.

Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан

E-mail: abduraximov1943@mail.ru

**Аннотация:** Рассматривается модель реактора с неоднородным кипящим слоем и анализируются режимы его работы в зависимости от коэффициентов массо-и теплообмена между плотной и разбавленной фазами, доли пузыря, проходящего в виде общего расхода газа, и других параметров. Модель основана на двухфазной теории течения газа через псевдооживленный слой.

**Ключевые слова:** адиабатический реактор; гидродинамические параметры; кипящий слой; одностадийная реакция; побочные реакции; пористость слоя; распаду продукта; степень продвижения реакции.

### 1. Введение

Рассматривается модель реактора с неоднородным кипящим слоем и анализируются режимы его работы в зависимости от коэффициентов массо- и теплообмена между плотной и разбавленной фазами, доли пузыря, проходящего в виде общего расхода газа, и других параметров.

Модель основана на двухфазной теории течения газа через псевдооживленный слой [1], согласно которой газ движется в виде двух фаз: плотной (газ, в промежутках между частицами) и разбавленной (газ, заполняющий полости, свободные от частиц и напоминающие пузыри в жидкости).

Исследования в области гидродинамики псевдооживленного слоя были обсуждены ранее [2] для случаев, когда скорость массообмена между пузырями и плотной фазой пропорциональна разности локальной концентрации реагента в пузырях и плотной фазе. Коэффициент пропорциональности определяется по результатам решения гидродинамической задачи о движении пузыря в псевдооживленном слое и данным экспериментов [3].

В предлагаемой модели используется условие постоянства температуры в плотной фазе во всем объеме реактора, обусловленное интенсивным движением твердых частиц. Предполагается также, что реагент как в плотной, так и в разбавленной фазе переносится в режиме идеального вытеснения. В таком же режиме переносится и тепловая энергия в разбавленной фазе, причем теплообмен между плотной и разбавленной фазами рассматривается аналогично массообмену.

Таким образом, предлагаемая модель реактора с неоднородным псевдооживленным слоем представляет собой обобщение модели реактора идеального вытеснения по веществу с интегральным учетом тепловыделения [4], предназначавшейся для описания режимов работы реактора с однородным слоем.

Известно несколько моделей химических реакторов с неоднородным кипящим слоем [2, 5–7]. Ряд исследований основан на работе [8], в которой предложена модель, включающая твердые частицы в качестве отдельной фазы, что может оказаться существенным для более точного описания процессов переноса вещества и тепла в реакторе. В работе [8] предполагалось, что слой однороден, а в газовой фазе достигается идеальное смешение по теплу и веществу.

В работе [7] модель, использованная в [8], модифицирована для случая неоднородного псевдооживленного слоя и является развитием двухфазной теории течения газа [9] через псевдооживленный слой. Каталитические частицы рассматривались в качестве отдельной фазы.

В отличие от [8] в работе [7] рассматривался реактор с непрерывным вводом частиц твердой фазы. Исследовано два предельных случая, в одном из которых газ в плотной фазе слоя считался идеально перемешанным, в другом рассматривался режим идеаль-

ного вытеснения газа в плотной фазе. Во всех случаях газ в разбавленной фазе слоя (в виде пузырьков) считался движущимся в режиме идеального вытеснения, предполагалось перемешивание частиц твердой фазы в соответствии с экспериментальными результатами. Аналитически и численно исследовано влияние смещения газа в плотной фазе слоя на степень превращения реагента.

Модель реактора с неоднородным организованным кипящим слоем описана в работе [6]. В организованном кипящем слое существенное значение приобретает продольная теплопроводность плотной фазы слоя. Действительно, вследствие улучшения контакта газа с частицами производительность единицы объема катализатора увеличивается в несколько раз по сравнению со свободно кипящим слоем, резко возрастают теплонапряженность и неоднородность тепловыделения по высоте слоя. Отсюда вытекает задача анализа температурных и концентрационных полей в условиях высокой по конечной теплопроводности. Модель отличается от [7] с учетом продольной теплопроводности плотной фазы и многокомпонентностью смеси. Для анализа модели применялись численные методы. Качественные особенности модели хорошо иллюстрирует случай реакции первого порядка. Оказалось, что число стационарных режимов в модели с учетом конечной теплопроводности не совпадает с числом стационарных режимов в реакторе идеального смещения по теплу. Если в последнем случае число режимов равно либо одному, либо трем, то в рассматриваемой модели возможно появление до пяти стационарных режимов.

## 2. Цель задачи и методы

Стационарный процесс в организованном псевдооживленном слое описывается системой нелинейных уравнений, решение которой представляет большие трудности.

В отличие от этих моделей рассматриваемая далее модель, отражая основные особенности неоднородного псевдооживления, допускает аналитическое исследование стационарных режимов работы реактора.

В соответствии с рассматриваемой моделью уравнения массо- и теплопереноса, начальные и граничные условия для каждой фазы запишем в следующем безразмерном виде, предполагая для простоты, что реакция имеет первый порядок.

Уравнения для плотной фазы

$$U_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} = (1 - Z_1) g \exp\left(\frac{\beta}{T_1}\right) - A(Z_1 - Z_2), \quad (1)$$

$$\alpha(T'_0 - T_1) - WU_1(T''_0 - T_1) + wg \exp\left(-\frac{\beta}{T_1}\right) \int_0^1 (1 - Z_1) dx - B\left(T_1 - \int_0^1 T_2 dx\right) = 0 \quad (2)$$

и граничные условия

$$x=0; \quad Z_1=0, \quad T_2 = T''_0. \quad (3)$$

Для разбавленной фазы

$$U_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x} = A(Z_1 - Z_2), \quad (4)$$

$$U_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = A(T_1 - T_2) \quad (5)$$

и граничные условия

$$x=0; \quad Z_2 = 0, \quad T_2 = T''_0. \quad (6)$$

Здесь

$$A = \frac{LA^*}{VC_0}; \quad A = \frac{LB^*}{VT_0''}; \quad Z = \frac{C_0 - C_n^*}{C_0}; \quad T_n = \frac{T_n^*}{T_0''}; \quad x = \frac{X}{L}; \quad u_n = \frac{u_n^*}{V}; \quad \alpha = \alpha_s \frac{s\tau_*}{V\rho_*C_*},$$

$$\beta = \frac{q}{RT}; \quad \tau = \frac{t}{\tau_*}; \quad g = k_0\tau_*; \quad W = \frac{q\rho_g C_g}{\rho_*C_*}; \quad \rho_*C_* = E\rho_g C_g + (1+E)\rho_s C_s,$$

где  $A^*$  и  $B^*$  – коэффициенты массообмена и теплообмена между плотной и разбавленной фазами;  $C_n^*$ ,  $C_0$  – концентрация реагента в фазе  $n$  ( $n=1$  соответствует плотной фазе,  $n=2$  разбавленной фазе);  $C_g$ ,  $C_s$  – удельная теплоемкость катализатора и газа;  $h$  – теплота реакции;  $K_0$  – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса;  $L$  – длина реактора;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_n^*$ ,  $T_0'$ ,  $T_0''$  – температура соответствующих фаз, окружающей среды;  $t$  – время;  $u_n^*$ ,  $v$  – скорость соответствующих фаз и потока ( $v=(1-E)u_1+Eu_2$ );  $E$  – объемная доля разбавленной фазы;  $X$  – координата, отсчитываемая по длине реактора;  $Z_n$ ,  $Z_n^0$  – степень продвижения реакции соответствующих фаз и в стационарном режиме реактора;  $\rho_g$ ,  $\rho_s$  – плотность газа и катализатора;  $S$  – боковая сторона реактора,  $\alpha_s$  – коэффициент теплопередачи;  $Q$  – энергия активации.

Модель, описываемая задачей (1) – (6), отражает тот факт, что в свободном псевдооживленном слое часто можно пренебречь диффузионным переносом реагентов [9] по сравнению с конвективным. В реакторе протекает необратимая химическая реакция первого порядка, сопровождающаяся выделением (поглощением) тепла.

Изучим сначала стационарные режимы работы реактора в отсутствие теплопередачи к стенкам ( $\alpha=0$ ).

### 3. Решение задачи

Для адиабатического реактора решение задачи имеет следующий вид:

$$T_0'' - T_0' = +\frac{1}{W} Z_1^0(1) + \frac{U_2}{WU} Z_2^0(1) - \frac{U_2}{WU_1} (T_2^0(1) - T'') = 0, \quad (7)$$

$$Z_1^0(x) = \frac{1}{K_2 - K_1} ((a - K_2) \exp(K_1 x) - (a - K_1) \exp(K_2 x)) + 1, \quad (8)$$

$$Z_2^0(x) = \frac{1}{K_2 - K_1} (K_2 \exp(K_1 x) - K_1 \exp(K_2 x)) + 1, \quad (9)$$

$$T_2''(x) = (T_0'' - T_1') \exp\left(\frac{B}{U_2 x}\right) + T_1^0 \quad (10)$$

$$\text{где } 2K_{1,2} = \frac{b_0}{U_1} \pm \left( \left( (U_1 + U_2)F - \frac{b}{U_1} \right)^2 - 4Fb \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a = \frac{U_2 K_1 K_2}{A}, \quad F = \frac{A}{U_1 U_2}, \quad b = g \exp\left(-\frac{\beta}{T_1^0}\right).$$

Отметим, что при  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$  выражение (7) соответствует решению задачи о стационарном режиме работы реактора с однородным слоем [8].

Рассмотрим сначала достаточно важный для практики случай слабого массообмена между пузырями и плотной фазой, что соответствует малой величине параметра межфазного массообмена  $A \ll 1$  (величину параметра межфазного теплообмена возьмем произвольной). Тогда для степени продвижения реакции и температуры плотной и разбавленной фаз имеем следующие выражения:

$$Z_1^0(x) = 1 - \exp\left(\frac{b_0 x}{U_1}\right) + \frac{A}{U_1} x \exp\left(-\frac{b_0 x}{U_1}\right), \quad (11)$$

$$Z_2^0(x) = \frac{AU_1}{b_0 U_2} \left( 1 - \frac{b_0 x}{U_1} - \exp\left(-\frac{b_0 x}{U_1}\right) \right), \quad (12)$$

$$T_0'' - T_1^0 + 1 + \exp\left(\frac{-b_0}{U_1}\right) + \frac{-b_0}{U_1} \left( \left(1 - \frac{U_1}{b_0}\right) \exp\left(\frac{-b_0}{U_1}\right) + \frac{U_1}{b_0} \right) - \frac{U_2}{WU_1} \left( \exp\left(\frac{\beta}{U_2}\right) - 1 \right) (T_0'' - T_1^0) = 0, \quad (13)$$

$$T_2^0(x) = (T_0'' - T_1^0) \exp\left(\frac{\beta x}{U_1}\right) T_1^0. \quad (14)$$

#### 4. Результаты и их обсуждение

Рассмотрим влияние неоднородного слоя и параметров массо- и теплообмена между плотной и разбавленной фазами на среднюю степень продвижения реакции в системе, определяемой по формуле

$$Z(x) = [(1-E)U_1 Z_1^0(x) + E U_2 Z_2^0(x)] / [(1-E)U_1 + E U_2] \quad (15)$$

Согласно расчетам по формуле (15) при следующих значениях параметров слоя:

$$A=50; \quad B=\exp(25); \quad T_0^1=1.75; \quad U_1=0.7,$$

получили, что увеличение доли пузырей в системе приводит к снижению степени продвижения реакции (рис. 1). А повышение температуры плотной фазы, как и следовало ожидать, приводит к увеличению степени продвижения реакции (рис. 2).

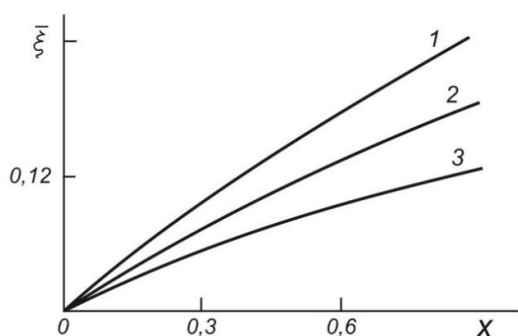


Рис. 1. Влияние неоднородности структуры потока на среднюю степень продвижения реакции: 1 –  $z=0.3$ ; 2–0.4; 3–0.5

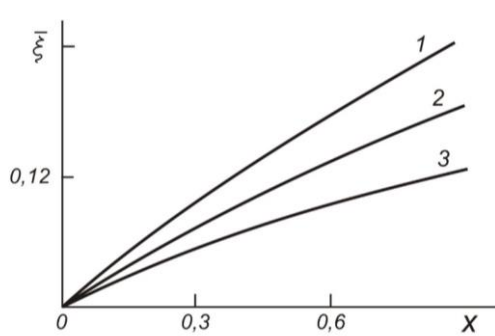


Рис. 2. Изменение средней степени продвижения реакции по длине реактора в зависимости от температуры и плотной фазы: 1 –  $T_1=1.8$ ; 2–1.9; 3–2.0

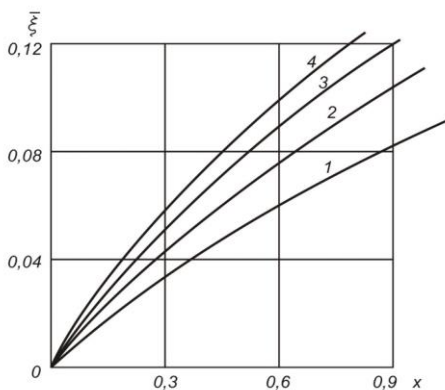


Рис. 3. Влияние коэффициента массообмена между фазами на среднюю степень продвижения реакции: 1 –  $A=0$ ; 2 – 0.02; 3 – 0.05; 4 – 0.1

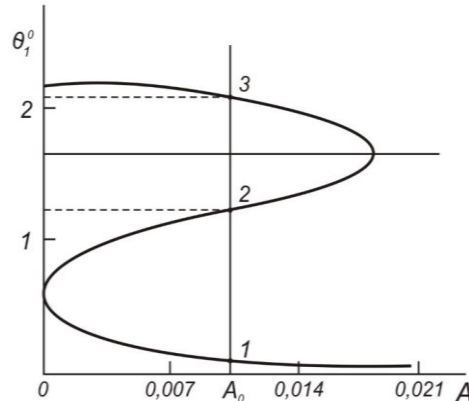


Рис. 4. Стационарные температурные режимы работы реактора в зависимости от интенсивности массообмена между фазами: 1–нижний; 2–средний; 3–верхний режим

Вычисления по формуле (15) при численных значениях показали, что с увеличением коэффициента массообмена выход продукта монотонно возрастает (рис. 3). Массообмен между плотной (эмульсионной) и разбавленной (пузырьковой) фазами играет важную роль в процессах переноса в псевдооживленном слое и часто становится лимитирующей стадией [10].

Аналогично случаю реактора с однородным слоем при достаточно общих условиях существуют три температурных режима работы реактора. При изменении параметров, ха-

рактизирующих неоднородность  $E$  слоя, происходит изменение температурных режимов. Так, с увеличением коэффициента массообмена между пузырями и плотной фазой значения температуры плотной фазы, соответствующие верхнему и среднему режимам, имеют тенденцию к сближению (рис. 4, где  $E=0.4$ ;  $B = 0.2$ ). При изменении коэффициента теплообмена имеют тенденцию к удалению (рис. 5, где  $A = 0.01$ ;  $E = 0.4$ ).

Расчет по формуле (15) показал, что при произвольных значениях  $A$  влияние коэффициента массообмена между разбавленной и плотной фазами, доли пузырей в реакторе и температуры на степень продвижения реакции качественно аналогично случаю  $A \ll 1$  (величину параметра межфазного теплообмена возьмем произвольной).

## 5. Заключение

Проведенный анализ свидетельствует о разнообразии влияния гидродинамических параметров на степень продвижения реакции в реакторе, причем, подбирая значения параметров в допустимом диапазоне, можно регулировать степень превращения реагента с неоднородным псевдооживленным слоем для получения максимального выхода продукта.

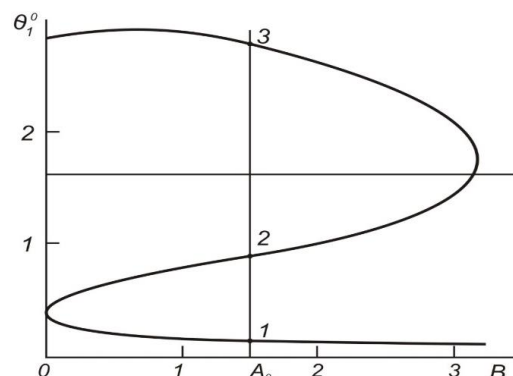


Рис. 5. Стационарные температурные режимы работы реактора в зависимости от значений коэффициента теплообмена между плотной и разбавленной фазами: 1 – нижний; 2 – средний; 3 – верхний режим

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гельперин Н.И., Айништейн В.Г., Кваша В.Б. Основы техники псевдооживления. М.:Химия. 1967. – 664 с.
- [2] Бородуля В.А., Гупало Ю.П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск: Наука и техника, 1976. – 207 с.
- [3] Бородуля В.А., Виноградов Л.М., Дикаленко В.И., Ковенский В.И. Экспериментальное определение параметров тепло-и массообмена для математического моделирования химических реакторов с псевдооживленным слоем// Тепло- и массоперенос: процессы и аппараты. Минск, 1978. С. 36 – 42.
- [4] Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С. О режимах работы химического реактора идеального вытеснения с интегральным учетом тепловыделения // ПМТФ. 1969. № 1. С. –34.
- [5] Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С. О стационарных режимах работы проточного газотермического химического реактора // ПМТФ. 1969. № 3. С. –97.
- [6] Емельянов И.Д., Шеплев В.С., Слинко М.Г. Число стационарных состояний эгзотермических процессов в организованном псевдооживленном слое катализатора // ДАН СССР. 1975. Т.221. №2. С. 402.
- [7] Bukur D.B., Wittmann C.V., Amundson N.R. Analysis of a model for a nonisothermal continuous fluidized bed catalytic reactor // Chem. Eng. Sci. Vol. 29. 1974. №5. P. 1173–1192. doi: 10.1016/0009-2509(74)80117-X.
- [8] Lee C.K., Yeung S.Y. S., Bailey J.E. Experimental studies of a consecutive-competitive reaction in steady state and forced periodic CSTRs // The Canadian Journal of Chemical Engineering. 1980. 58(2). P. 212–218.
- [9] Слинко М.Г., Шеплов Б.С. Моделирование каталитических процессов в псевдооживленном слое // Кинетика и катализ. Вып.2. 1970. Т.11. С. 121.
- [10] Абдурахимов А. О режиме работы реактора // Проблемы механики. 2019. № 2. С. 81–83.

Дата поступления  
18.03.2021

**Абдурахимов А., Холиков Д. Гетероген суюқлик қатлами бўлган кимёвий реакторнинг ишлаш режимини ўрганиш**

**Аннотация:** Гетероген оқимли қатламдаги реактор моделининг зич ва суюлтирилган фазалар орасидаги масса ва иссиқлик коэффициентларига, газ оқимининг умумий тезлиги кўринишидаги пуфакчанинг қисмига ва бошқа параметрларга боғлиқлиги таҳлил қилинган. Модель акваториал қатлам орқали газ оқимининг икки фазали назариясига асосланган.

**Калит сўзлар:** адиабатик реактор; гидродинамик параметрлар; суюқ қатлам; бир босқичли реакция; ён реакциялар; қатлам ғовақлиги; маҳсулотнинг парчаланиши; гетероген суюқлик.

**Abdurakhimov A., Kholikov D. Investigation of the operating modes of a chemical reactor with a heterogeneous fluidized bed**

**Abstract:** A model of a reactor with a heterogeneous fluidized layer is considered and its operation modes are analyzed depending on the mass and heat transfer coefficients between the dense and dilute phases, the fraction of the bubble passing in the form of the total gas flow rate and other parameters. The model is based on the two-phase theory of gas flow through a fluidized layer.

**Keywords:** adiabatic reactor; hydrodynamic parameters; fluidized bed; one-stage reaction; side reactions; bed porosity; product decomposition; degree of reaction progress; heterogeneous.

УДК 539.3

## **К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ГРУНТА С ТРУБОПРОВОДОМ ПРИ СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ**

**Мардонов Б.М.**

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: batsam@list.ru*

**Аннотация:** В статье представлены результаты теоретического анализа сдвиговых колебаний жесткого трубопровода, взаимодействующего с водонасыщенным грунтом, и приведены параметры контактной силы, действующей на трубопровод. Дана методика теоретического определения коэффициентов жесткости при сдвиге и трения на поверхности контакта трубопровода с грунтом. Выявлено, что пористость среды существенно влияет на коэффициент вязкого трения, с ростом значений которой такое влияние происходит при низких частотах воздействия.

**Ключевые слова:** подземный трубопровод; взаимодействие в системе «трубопровод – грунт»; двухфазная среда; сдвиговые колебания; пористость и проницаемость среды.

### **1. Введение**

В практике расчета сооружений на сейсмические воздействия связь с грунтом обычно принимается односторонней, реакция основания определяется только перемещением сооружения в данной точке контакта. На самом деле сооружение и грунт образуют связанную динамическую систему, причем существенной может оказаться обратная связь от сооружения к грунту, тогда сейсмическое воздействие не может определяться независимо от характеристик сооружения. Если сооружение достаточно гибко по сравнению с окружающим или подстилающим его грунтом, его перемещения и деформации будут соответствовать перемещениям и деформациям грунта при отсутствии сооружения. В случае движения жесткого сооружения в грунтовой среде возникают вторичные волны излучения, существенно искажающие исходное сейсмическое поле внешнего воздействия вблизи сооружения. Это обстоятельство может сыграть существенную роль при определении контактных сил взаимодействия грунта с элементами подземного сооружения, в частности, с трубопроводом. Для определения параметров взаимодействия следует найти решения контактной задачи между элементом сооружения (жестким или деформируемым) и грунтом, представленным в виде подходящей модели сплошной среды, либо произвести большое количество экспериментов для установления закономерностей изменений контактной силы между грунтом и элементом сооружения от перемещения его относительно грунта.

Анализ экспериментальных данных по установлению закономерностей взаимодействия трубопровода с грунтом, представленных в работах [1–5], показывает, что контактная сила взаимодействия существенно зависит от свойств окружающего трубопровод грунта, причем законы взаимодействия имеют достаточно сложный характер. К результатам экспериментальных исследований следует относиться с некоторой осторожностью. Хотя полученные данные устанавливают отдельные физические закономерности, но они не обладают универсальностью, поскольку представлены без применения основных положений теории подобия и размерности в соответствии с  $\pi$ -теоремой, согласно которой мож-

но было снизить количество определяющих параметров и устанавливать различные критерии подобия, как это принято в аэродинамике.

Немаловажным моментом является оценка значимости и адекватности полученных закономерностей по результатам статистической обработки данных. В экспериментах отсутствует информация о планах проведения параллельных опытов (отметим, что они не являются повторением опытов для выбранных вариантов), не произведены оценки однородности дисперсии параллельных опытов по критерию Кохрена. Адекватность представленных аппроксимирующих кривых не оценена по критерию Фишера-Снедекора. Независимо от ценности данных экспериментов для практики, отметим, что для механиков-теоретиков в первую очередь они должны служить проверкой результатов теоретических расчетов, выполненных для трубопровода, контактирующего с выбранной моделью грунта.

Сложившаяся ситуация в области развития теории сейсмодинамики подземных сооружений в настоящее время указывает на значительное отставание в части теоретического изучения динамического поведения подземных конструкций с учетом полного взаимовлияния элементов подземной конструкции с грунтовой средой, пространственного характера их деформирования. Целесообразно в дальнейшем создать методы теоретического определения параметров силового воздействия грунтовой среды на сооружения и далее сравнивать их с данными экспериментов.

В связи с вышеизложенным в данной статье рассматривается простейшая задача определения параметров взаимодействия жесткого подземного трубопровода с грунтовой средой при сдвиговых колебаниях. Принимается, что массив грунта вокруг трубопровода – слоистый однородный на большой длине и по глубине, трубопровод рассматривается как жесткий стержень, а полупространство занято грунтовой средой. При этом наилучшие результаты при изучении реакции системы трубопровод – грунт могут быть получены, если в качестве дополнительного параметра использовать присоединенную массу грунта. Таким образом, модель окружающего трубопровод грунта включает следующие параметры: упругую постоянную пружины, определяемую как зависимость динамической силы от перемещения, присоединенную массу, коэффициент демпфирования, получаемые из рассмотрения безынерционной модели. Путем правильного выбора этих динамических характеристик модель сопротивления грунта при действии на трубопровод осевой силы может быть с требуемой точностью использована для теоретического анализа работы окружающей трубопровод грунтовой средой. В работах [6 – 8] такой подход использован для описания теоретических методов определения динамических параметров колебания жесткой плиты (круглого и квадратичного сечения).

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим вынужденные горизонтальные колебания жесткой цилиндрической трубы длиной  $L$  и радиуса  $r_0$ , параллельно вставленной внутри цилиндрического слоя толщиной  $h=r_1-r_0$  грунтовой среды, где  $r_1$  – радиус слоя. Грунт рассматривается как насыщенная двухкомпонентная сплошная среда, движения частиц среды описываются уравнениями Био–Френкеля. Волновые процессы в такой среде, обусловленные движением в ней цилиндрических и сферических тел, изучены в работах [9 – 13]. Полагаем движение среды осесимметричным, где ось  $Oz$  направлена вдоль оси цилиндра, а ось  $Or$  перпендикулярна к ней. Учитываем только осевые перемещения твердой и жидкой компонент среды, зависящие только от переменной  $r$ , причем трубопроводом вовлекается в движение слой среды толщиной  $h$ . Уравнение движения грунта в принятых допущениях записываем по модели Био–Френкеля [10]

$$N \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial r} \right) = \rho_{11} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial W_2}{\partial t} \right), \quad (1)$$

$$0 = \rho_{12} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} - b \left( \frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial W_2}{\partial t} \right) \quad r_0 < r < r_1, \quad (2)$$

где  $W_1 = W_1(r, t)$  и  $W_2 = W_2(r, t)$  – перемещения частиц твердой и жидкой фаз;  $N$  – модуль сдвига твердой фазы;  $f$  – пористость;  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  – эффективные плотности твердых и жидких фаз;  $\rho_{12}$  – коэффициент динамической связи

$$\rho_{11} = (1-f)\rho_s - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = Ef\rho_f, \quad \rho_{12} = -(E-1)f\rho_f, \quad b = \eta_g f^2 / k,$$

$\eta_g$  – вязкость жидкости;  $k$  – проницаемость, которая не зависит от свойств жидкости, определяемая геометрией порового пространства. Среда имеет проницаемость  $1 \text{ мкм}^2$ , если при градиенте давления  $10 \text{ МПа/м}$  через площадку  $10^{-4} \text{ м}^2$  расход жидкости, вязкость которой  $10^{-3} \text{ Па·с}$ , составляет  $10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$ , т. е.  $1 \text{ мкм}^2 = 10^{-12} \text{ м}^2$ .

Существуют различные аналитические зависимости между проницаемостью, пористостью, размером, формой и упаковкой частиц. Например, для фиктивного грунта Слихтер и Козен предлагали соответственно следующие теоретические зависимости [14]

$$k = nd_r^2 / 96(1-f)^2, \quad k = f^3 d_r^2 / 100(1-f)^2$$

Эти и другие формулы, очевидно, полезны при изучении закономерностей фильтрации только в искусственных пористых телах. Достоверные результаты можно получить в лабораторных условиях на керновом материале или при натурных испытаниях насыщенных грунтов с последующей интерпретацией полученных результатов.

### 3. Решения и обсуждение результатов

Пусть трубопровод совершает колебания по закону

$$W = W_0 e^{i\omega t},$$

где  $W_0$  и  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний.

Рассмотрим колебательный процесс и решение уравнений (1) и (2) представим в виде

$$W_1 = u_1(r) \exp(i\omega t), \quad W_2 = u_2(r) \exp(i\omega t).$$

Уравнения (1) и (2) принимают вид

$$N \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = -\omega^2 \rho_{11} u_1 - \omega^2 \rho_{12} u_2 + i b \omega (u_1 - u_2), \quad (3)$$

$$0 = -\omega^2 \rho_{12} u_1 - \omega^2 \rho_{22} u_2 - i b \omega (u_1 - u_2). \quad (4)$$

Поскольку перемещения частиц жидкости и твердой, согласно уравнению (4) связаны, то граничные условия на поверхности трубопровода и внешней непроницаемой границы слоя среды вводятся перемещение, осредненное по плотности ( $\rho = \rho_1 + \rho_2$ )

$$\rho U = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2. \quad (5)$$

Перемещение  $U(r)$  обозначает совместное перемещение двух фаз и поэтому граничные условия записываются относительно  $U(r, z)$

$$U = W_0 \text{ при } r = r_0, \quad (6)$$

$$U = 0 \text{ при } r = r_1. \quad (7)$$

Пользуясь уравнениями (4) и (5), функции  $u_2(r)$  и  $U(r)$  можно выразить через перемещение  $u_1(r)$ :

$$u_2 = u_1(r) \frac{i b + \rho_{12} \omega}{i b - \rho_{22} \omega}, \quad (8)$$

$$U = u_1(r) \frac{i b - \Delta \omega}{i b - \rho_{22} \omega}, \quad (9)$$

где  $\Delta = (\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2) / \rho$ ,  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ .

Складывая уравнения (3) и (4) с учетом (9), получаем

$$N \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\omega^2 \rho \frac{ib - \Delta \omega}{ib - \rho_{22} \omega} U. \quad (10)$$

Для дальнейшего упрощения постановки задачи полагаем  $\rho_{12}=0$ ,  $\rho_2 < \rho_1$ . Это условие выполняется при значении  $f < 0.3$ . Тогда можно приближенно полагать  $\Delta \approx \rho_{22}$  и (10) заменить уравнением

$$N \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\omega^2 \rho U. \quad (11)$$

Решение уравнения, удовлетворяющее условиям (6) и (7) имеет вид

$$U = W_0 \frac{J_0(\bar{\omega} \xi) N_0(\bar{\omega}) - J_0(\bar{\omega}) N_0(\bar{\omega} \xi)}{J_0(\bar{\omega} s) N_0(\bar{\omega}) - J_0(\bar{\omega}) N_0(\bar{\omega} s)}, \quad (12)$$

где  $\bar{\omega} = \omega r_1 / c$ ,  $\xi = r / r_1$ ,  $s = r_0 / r_1$ ,  $c = \sqrt{N / \rho_{11}}$ .

Для определения перемещения  $W_0$  составим следующее уравнение движения трубопровода под действием осевой силы  $P_0 e^{i\omega t}$  ( $m$  – масса трубопровода):

$$-\omega^2 m U = -\frac{2\pi r_0 N L}{r_1} \frac{du_1}{d\xi} + P_0 \quad \text{при } \xi = s. \quad (13)$$

Пользуясь формулой (12) для перемещения  $U(\xi)$  из (13), получим выражение для  $W_0$

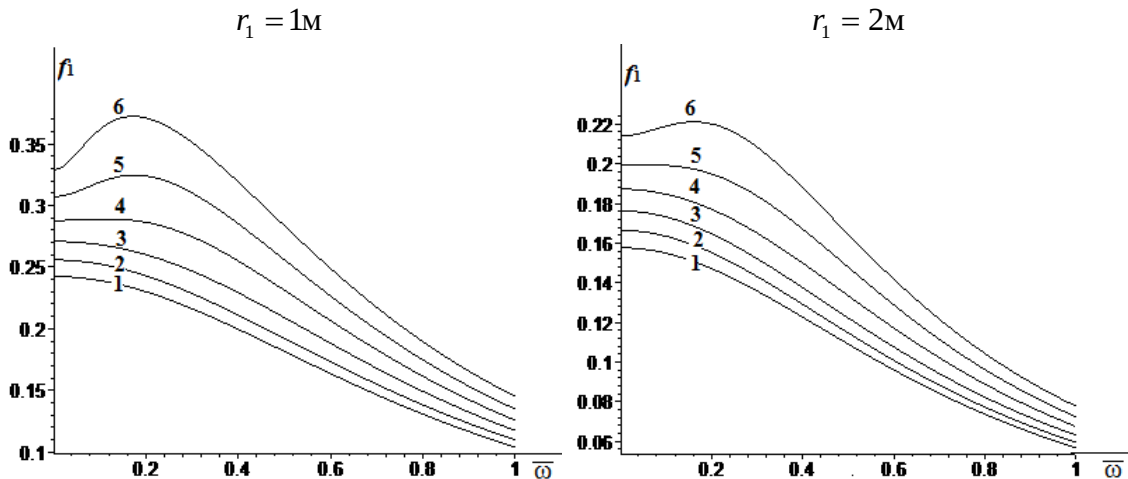
$$W_0 = -\bar{P}_0 [f_1(\bar{\omega}) + i f_2(\bar{\omega})], \quad (14)$$

где 
$$f_1 = \frac{f_{11}}{\bar{\omega}(1-f)(f_{11}^2 + f_{12}^2)}, \quad f_2 = \frac{f_{12}}{\bar{\omega}(1-f)(f_{11}^2 + f_{12}^2)}, \quad f_{11} = \beta \bar{\omega} - a_0(\bar{\omega}) J(\bar{\omega}),$$

$$f_{12} = b b_0(\bar{\omega}) J(\bar{\omega}), \quad a_0 = \frac{\bar{\Delta} \bar{\rho}_{22} \bar{\omega}^2 + \bar{b}^2}{\bar{\Delta}^2 \bar{\omega}^2 + \bar{b}^2}, \quad b_0 = \frac{(\bar{\rho}_{22} - \bar{\Delta}) \bar{\omega}}{\bar{\Delta}^2 \bar{\omega}^2 + \bar{b}^2}, \quad J = \frac{N_1(\bar{\omega} s) J_0(\bar{\omega}) - J_1(\bar{\omega} s) N_0(\bar{\omega})}{J_0(\bar{\omega} s) N_0(\bar{\omega}) - J_0(\bar{\omega}) N_0(\bar{\omega} s)},$$

$$\beta = \frac{m r_1}{2 m_0 r_9}, \quad m_0 = \pi r_0^2 L \rho_{11}, \quad \bar{\Delta} = \Delta / \rho_{11}, \quad \bar{\rho}_{22} = \rho_{22} / \rho_{11}, \quad \bar{b} = b r_1 / c \rho_{11}, \quad \bar{P}_0 = P_0 r_1 / 2 \pi r_0 \rho_s c^2 L.$$

На рис. 1 представлены кривые зависимости функции  $f_1$  и  $f_2$  от безразмерной частоты  $\bar{\omega}$  для различных значений пористости  $f$ . Для вычисления коэффициента проницаемости  $k$  в расчетах использована теоретическая формула Козена для диаметра частиц  $d_r = 0.006$  м и принято  $r_0 = 0.1$  м,  $L = 3$  м,  $\rho_s = 1600$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_f = 1600$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 200$  м/с,  $\eta_g = 0.001$  Па·с (вода):



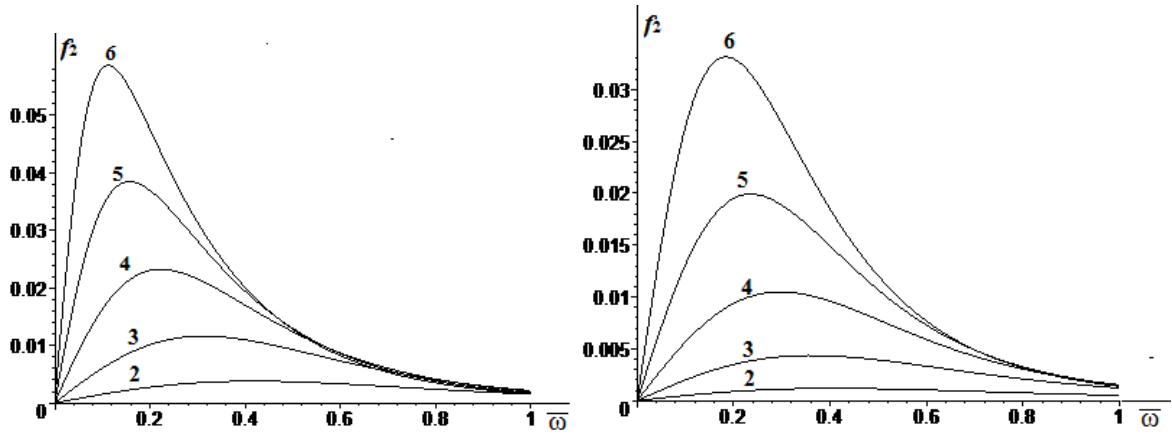


Рис.1. Кривые зависимости функции  $f_1$  и  $f_2$  от безразмерной частоты  $\bar{\omega}$  для диаметра частиц  $d_r=0.006$  м, различных значениях толщины слоя  $r_1$ (м) и пористости среды  $f$ :  
1 –  $f=0.05$ ; 2 –  $f=0.1$ ; 3 –  $f=0.15$ ; 4 –  $f=0.2$ ; 5 –  $f=0.25$ ; 6 –  $f=0.3$

Из анализа кривых следует, что увеличение пористости приводит к росту функций  $f_1(\bar{\omega})$  и  $f_2(\bar{\omega})$ , причем существенный рост имеет функция  $f_2(\bar{\omega})$ . Это означает, что изменение структуры грунтовой среды, связанное с ростом пористости, может усилить затухания амплитуды колебаний трубопровода.

Для изучения вынужденного сдвигового колебания трубопровода конечной массы, находящейся в слое двухкомпонентной среды, используем метод, предложенный в работах [6, 7]. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний трубопровода во всех случаях независимо от выбора модели окружающей среды имеет один тот же вид, отличающийся только коэффициентами

$$m\ddot{z} + \mu_c \dot{z} + k_c z = P e^{i\alpha t},$$

где  $z$  – осевое перемещение трубопровода;  $k_c$  и  $\mu_c$  – коэффициенты жесткости при сдвиге и вязкого сопротивления среды. Пользуясь зависимостью (13), устанавливаем

$$(k_z + i\omega\mu)r_1 = 2\pi r_9 L \bar{\omega} N \frac{\bar{\rho}_{22}\bar{\omega} - ib}{\Delta\bar{\omega} - ib} J(\bar{\omega}).$$

Из этого равенства определим коэффициенты  $k_c$  и  $\mu_c$

$$k_c = \frac{2\pi r_0 L \bar{\omega} N a_0(\bar{\omega}) J(\bar{\omega})}{r_1}, \quad \mu_c = \frac{2\pi r_0 L N \bar{b} b_0(\bar{\omega}) J(\bar{\omega})}{r_1 \omega}.$$

На рис.2 представлены кривые зависимости коэффициентов жесткости при сдвиге на поверхности контакта трубопровода с грунтовой средой. Видно, что учет пористости среды приводит к снижению значений коэффициента жесткости при сдвиге  $k_c$ , причем такая закономерность наблюдается при малых частотах внешней действующей нагрузки. При высоких частотах влияние пористости незначительное. Пористость среды существенно влияет на коэффициент вязкого трения на поверхности контакта трубы с грунтовой средой. С ростом пористости такое влияние происходит при низких частотах воздействия. При этом замечено, что при значениях пористости  $f < 0.15$  коэффициент  $\mu$  практически не зависит от частоты  $\omega$ .

Для оценки влияния проницаемости  $k$ , характеризующей структурное строение среды, на величину коэффициента вязкого трения  $\mu$  проведены расчеты, результаты которых представлены на рис.3. Из анализа графиков следует, что при малых значениях приведенного диаметра твердых частиц среды  $d_r$  коэффициент  $\mu$  практически не зависит от частоты воздействия и с ростом диаметра при низких частотах значение коэффициента увеличивается приблизительно в 2 – 4 раза. Предложенная методика позволит использо-

вать разработанную модель грунта для оценки величин контактных сил взаимодействия между грунтом и жестким трубопроводом.

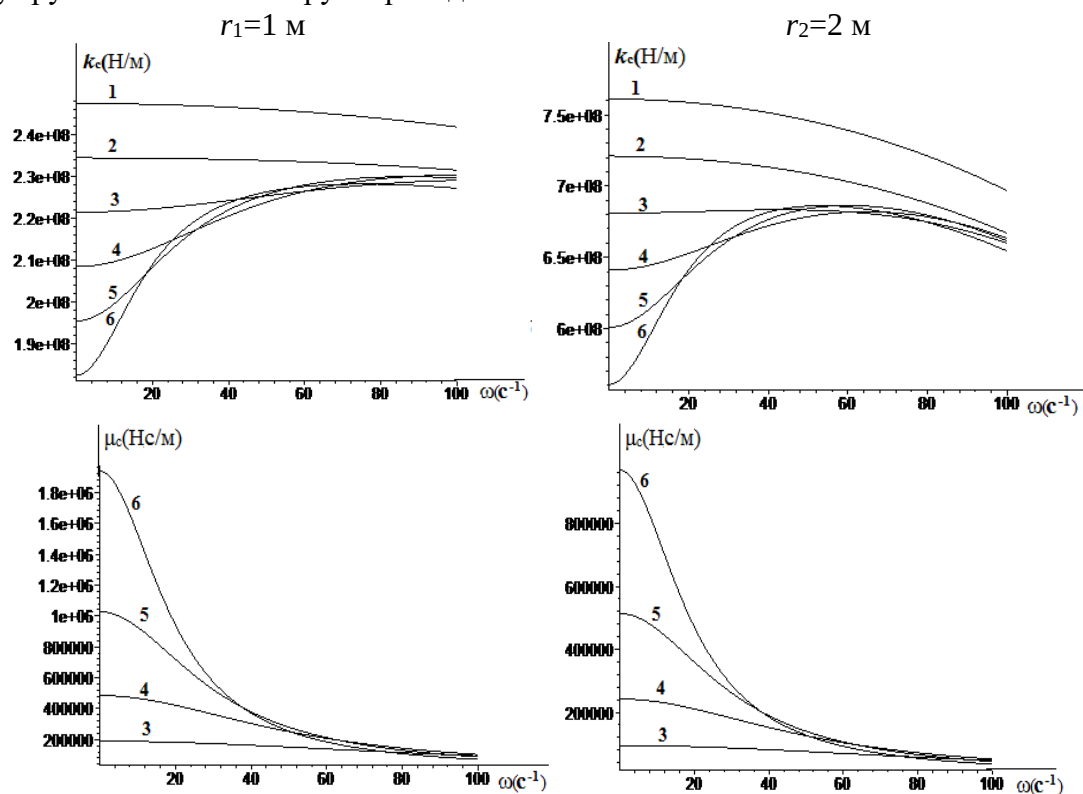


Рис.2. Кривые зависимости коэффициентов жесткости  $k_c$  (Н/м) и вязкого трения  $\mu_c$  (Нс/м) от безразмерной частоты  $\bar{\omega}$  для двух радиусов слоя и различных значений пористости среды  $f$ :  
1 -  $f=0.05$ ; 2 -  $f=0.1$ ; 3 -  $f=0.15$ ; 4 -  $f=0.2$ ; 5 -  $f=0.25$ ; 6 -  $f=0.3$

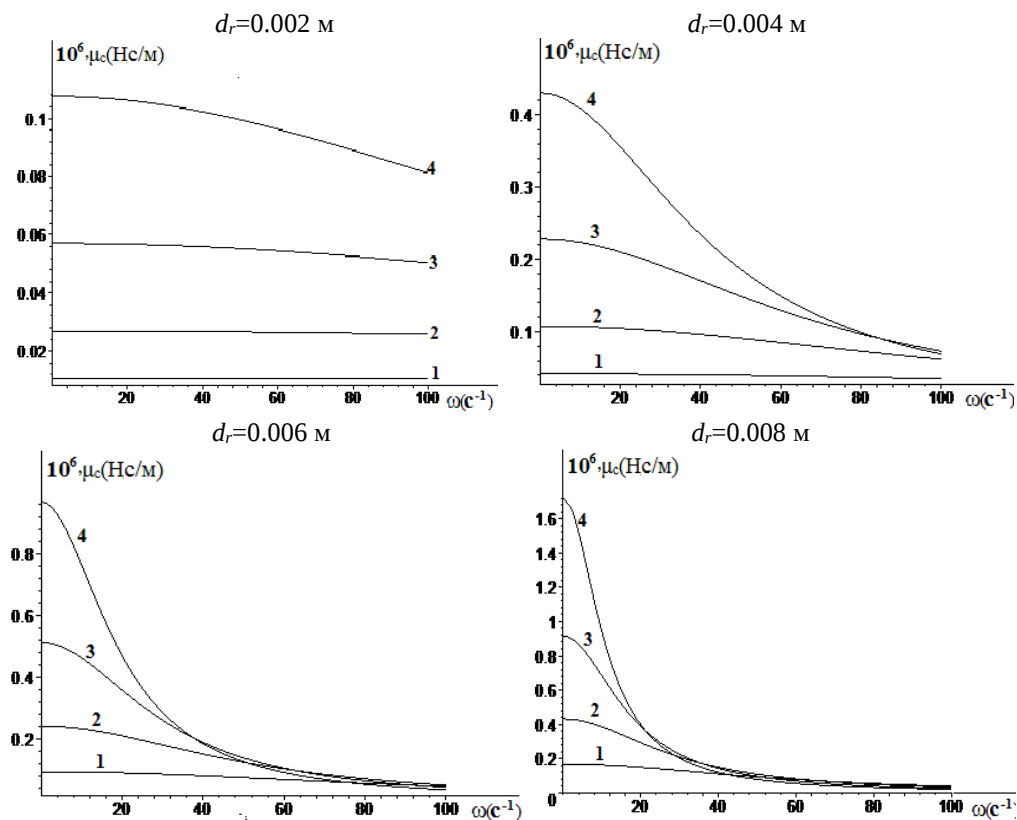


Рис.3. Кривые зависимости коэффициента вязкого трения  $\mu_c$  (Нс/м) от безразмерной частоты  $\bar{\omega}$  для различных значений диаметра частиц  $d_r$  (м) пористости среды  $f$ : 1 -  $f=0.15$ ; 2 -  $f=0.2$ ; 3 -  $f=0.25$ ; 4 -  $f=0.3$

#### 4. Заключение

В качестве примера рассмотрены сдвиговые колебания жестких подземных трубопроводов, взаимодействующих со слоистым однородным грунтом, при этом модель окружающего трубопровод грунта включает следующие параметры: упругую постоянную пружину, присоединенную массу, коэффициент демпфирования.

Проведена сравнительная оценка результатов сдвиговых колебаний трубопровода конечной массы, находящейся в слое двухкомпонентной среды, для различных значений толщины слоя и пористости среды. Для вычисления коэффициента проницаемости в расчетах использована теоретическая формула Козена.

Анализ результатов показывает, что учет пористости среды приводит к снижению значений коэффициента жесткости при сдвиге, причем такая закономерность наблюдается при малых частотах внешней действующей нагрузки. При высоких частотах влияние пористости незначительное.

Выявлено, что пористость среды существенно влияет на коэффициент вязкого трения на поверхности контакта трубы с грунтовой средой. С ростом пористости такое влияние происходит при низких частотах воздействия.

Установлено, что при малых значениях приведенного диаметра твердых частиц среды коэффициент вязкого трения практически не зависит от частоты воздействия и с ростом диаметра при низких частотах значение коэффициента увеличивается приблизительно в 2 – 4 раза.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
- [2] Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х., Мардонов Б. Колебания сооружений, взаимодействующих с грунтом. Ташкент: Фан, 1975. – 152 с.
- [3] Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. – 392 с.
- [4] Jianbo Dai, Li Wang, Chengtao Hu, Guidi Zhang. Experimental Study on Seismic Response of Buried Oil and Gas Pipeline Soil Layers under Lateral Multipoint Excitation // Hindawi, Journal “Shock and Vibration”. 2021, Article ID 9887140, P. 11. <https://doi.org/10.1155/2021/9887140>.
- [5] Castiglia M., Fierro T., Santucci de Magistris. Pipeline performances under earthquake-induced soil liquefaction: state of the art on real observations, model tests, and numerical simulations// *Shock and Vibration*. 2020, Article ID 8874200, P. 20. <https://doi.org/10.1155/2020/8874200>.
- [6] Баркан Д.Д., Шавич В.М. Влияние присоединенной массы грунта и его нелинейных свойств на колебания фундамента // Основание, фундаменты и механика грунтов. 1976. №2.
- [7] Баркан Д.Д., Мардонов Б. О теории вынужденных колебаний фундаментов на основании, моделируемом упругим полупространством // Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений. Книга 1. Ташкент: Фан. 1977.
- [8] Sung T.V. Vibrations in Semi-infinite Solids due to Periodic Surface Loading In. ASTM, Special Technical Publication, 136, Symposium of Dynamic Testing b of Solids, 1963.
- [9] Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. № 41. С. 133–159
- [10] Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика Сб. переводов. 1963. №6. С.103–135
- [11] Уайт Д.Е., Михайлов И.Г., Ляховский Ф.М. Распространение сейсмических волн в слоистых средах, насыщенных жидкостью и газом // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1975. №10. С. 44 – 52
- [12] Рахматуллин Х.А., Саатов Я.У., Филиппов И.Г., Артыков Т.У. Волны в двухкомпонентных средах. Ташкент: Фан, 1974. – 225 с.
- [13] Мардонов Б.М. Волновые процессы в упругих насыщенных средах. Ташкент: Фан. 1991. – 200 с.
- [14] Рабинович Н.Р. Инженерные задачи механики сплошных сред в бурении. М.: Недра, 1989. – 270 с.

Дата поступления  
16.06.2021

**Мардонов Б.М. Силжиидаги тебранишларда қувурнинг сувга тўйинган грунт билан ўзаро таъсир кучи параметрларини аниқлаш**

**Аннотация:** Мақолада сувга тўйинган грунт билан ўзаро таъсирдаги бикр қувурнинг силжиидаги тебранишлари назарий таҳлили натижалари келтирилган ва қувурга таъсир этувчи боғланиш кучларининг параметрлари ўрганилган. Қувурнинг грунт билан боғланиш сиртидаги ишқаланиш ва силжиидаги бикрлик коэффициентларини назарий аниқлаш методикаси берилган. Қовушқоқ ишқаланиш коэффициентини ўзгаришига муҳитнинг ғоваклиги катта таъсир кўрсатиши аниқланган, қийматнинг бундай ўсиб бориши кичик частоталар таъсирида вужудга келади.

**Калит сўзлар:** ер ости қувури; “қувур-грунт” тизимида ўзаро таъсир; икки фазали муҳит; силжиидаги тебраниш; муҳитнинг ғоваклиги ва ўтказувчанлиги.

**Mardonov B.M. Determination of the parameters of the interaction forces of water-saturated soil with a pipeline under shear vibrations**

**Abstract:** The article presents the results of a theoretical analysis of shear vibrations of a rigid pipeline interacting with water-saturated soil, and the parameters of the contact force acting on the pipeline. A method is given for the theoretical determination of the shear stiffness and friction coefficients on the surface of the pipeline-soil contact. It was revealed that the porosity of the medium significantly affects the coefficient of viscous friction, with an increase in the values of which such an effect occurs at low frequencies of the impact.

**Keywords:** underground pipeline; interaction in the "pipeline - soil" system; two-phase medium; shear vibrations; porosity and permeability of the medium.

УДК 699.841

## ОЦЕНКА СЕЙСМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ЗДАНИЙ ДОШКОЛЬНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ ГОРОДА ТАШКЕНТА И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИХ ДАЛЬНЕЙШЕЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Сагдиев Х.С., Ювмитов А.С., Тешабоев З.Р., Галиаскаров В.А.,  
Шерниёзов Х.О., Мирзакабилов Б.Н., Собиров З.Ж.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: imssan@mail.ru

**Аннотация:** В статье приведена классификация зданий дошкольных учреждений в соответствии со строительными нормами и правилами, действовавшими в период их строительства. Рассмотрены результаты технического обследования строительных конструкций зданий и оценка соответствия их объемно-планировочных и конструктивных решений действующим нормам по проектированию зданий и сооружений в сейсмических районах. Определены динамические характеристики зданий и физико-механические свойства грунтов строительных площадок. Проведен анализ полученных инструментальных данных. Проведены результаты расчетной оценки сейсмостойкости зданий при сейсмических воздействиях. Сформулированы заключение и рекомендации по обеспечению сейсмической безопасности и снижению ущерба при сильных землетрясениях.

**Ключевые слова:** сейсмостойкость зданий; техническое обследование; инструментально-расчетные исследования.

### 1. Введение

В настоящее время мировой научно-технический потенциал не в силах предсказать точное время, место и силу происходящих на планете сильных землетрясений. В последние десятилетия на планете существенно повысилась интенсивность нестационарного проявления сильных землетрясений. Основным методом борьбы против происходящих землетрясений – является обеспечение сейсмической безопасности зданий и сооружений при строительстве на основе последних достижений науки и техники, а также усиление строительных конструкций эксплуатируемых объектов на основе результатов инструментально-расчетных исследований. В связи с этим в республике разработаны научно-технические, управленческие и организационные мероприятия по защите от сейсмической опасности во исполнение Постановлений Президента Республики Узбекистан №ПП-3190 от 09.08.2017 г. «О мерах по совершенствованию научных исследований в области сей-

смологии и сейсмостойкого строительства, и сейсмической безопасности населения и территории Республики Узбекистан» и №ПП-4794 от 30.07.2020 г. «О мерах по коренному совершенствованию системы обеспечения сейсмической безопасности населения и территории Республики Узбекистан», которые способны в значительной степени снизить ущерб и потери от потенциальной сейсмической угрозы.

В настоящее время в республике функционируют школьные и дошкольные образовательные учреждения, здания которых построены без антисейсмических мероприятий в начале XX в., а также по старым строительным нормам и положениям, примененным при проектировании зданий и сооружений в разные периоды [1–7], начиная с середины XX века. Эксплуатируемые здания имеют различные конструктивные решения и построены с использованием различных строительных материалов. При выполнении в 2018–2020 гг. научного проекта ФА-Атех-2018-(23+65) «Оценка сейсмостойкости зданий школьных и дошкольных учреждений, построенных в соответствии с требованиями действовавших нормативных документов в период их строительства и разработка методов расчета сейсмостойкости с учетом их пространственных моделей и комплексной сейсмозащиты» проведены инструментально - расчетные исследования и оценка технического состояния зданий школьных и дошкольных учреждений [8–11], разработаны рекомендации по обеспечению их сейсмической безопасности в зависимости от объемно-планировочных и конструктивных решений, от года постройки и сейсмичности строительной площадки.

## **2. Классификация дошкольных учреждений**

По представленным материалам Городского управления дошкольного образования г.Ташкента проведена классификация зданий дошкольных образовательных учреждений (ДОУ) в соответствии со строительными нормами и правилами, действовавшими в период их строительства. В зависимости от года постройки различаются объемно-планировочные и конструктивные решения, несущие конструкции и использованные элементы конструкции в соответствии с требованиями проектирования в сейсмических районах. До 1970 г. здания, в основном, построены из жженого кирпича с продольными, поперечными или смешанного типа несущими стенами. В несущих конструкциях зданий ДОУ, построенных после 1970 г., преобладают железобетонные элементы, являющиеся более сейсмостойкими по сравнению с кирпичными несущими стенами. Действовавшие в разные периоды нормативные документы существенно отличаются не только по требованиям к строительным конструкциям по объемно-планировочным и конструктивным решениям, а также по другим характеристикам зданий и картам общего сейсмического районирования территорий.

Следует отметить, что в настоящее время в эксплуатации находятся здания учреждений, построенные до применения в практике нормативных документов по проектированию и строительству зданий и сооружений в сейсмических регионах. Эти здания ДОУ размещены по районам г.Ташкента следующим образом: №89 – в Чиланзарском районе; №487, №100, №530, №103 – в Яккасарайском районе; №172, №67, №4 – в Алмазарском районе; №21, №76 – в Шайхантахурском районе. В некоторых дошкольных учреждениях имеются отдельные корпуса (блоки) с различными объемно-планировочными и конструктивными решениями, построенные в разные годы с разницей в несколько десятилетий.

Из анализа данных выявлено, что основное количество ДОУ г. Ташкента построено в 1960 – 1990 гг., т.е. построенные дошкольные учреждения за этот период составляют более 85% от их общего количества. Остальные ДОУ распределены следующим образом: около 9% ДОУ построены в 1950–1960 годах по требованиям норм ТУ-58-48, ПСП 101-51 и СН-8-57; более 2% – по требованиям нормы КМК 2.01.03-96; около 3% из общего количества ДОУ построены без применения антисейсмических мероприятий.

Для предварительной оценки сейсмической уязвимости и последовательного обеспечения сейсмической безопасности в зависимости от года постройки ДОУ в. Ташкенте

разделены на три группы [8]. В первую группу включены учреждения, построенные без антисейсмических мероприятий и по нормам ТУ-58-48, ПСП 101-51 и СН-8-57, во вторую группу включены ДОУ, построенные по требованиям норм СНиП II-A.12-62 и СНиП II-A.12-69, и в третью группу включены ДОУ, построенные по требованиям норм СНиП II-7-81 и КМК 2.01.03-96.

Для зданий ДОУ первой группы, не отвечающих по объемно-планировочным и конструктивным решениям, требованиям нормативных документов по сейсмостойкому строительству, рекомендуется проводить дополнительные исследования и определить дальнейшее их назначение.

Для надежной дальнейшей эксплуатации зданий ДОУ второй группы, не полностью отвечающих по объемно-планировочным и конструктивным решениям требованиям нормативных документов по сейсмостойкому строительству, рекомендуется на основе детального инструментального обследования произвести усиление несущих конструкций.

Для продления срока службы и надежной дальнейшей эксплуатации зданий ДОУ третьей группы рекомендуется проведение детального обследования, определение прочности несущих конструкций инструментальными методами и проверочным расчетом на сейсмические нагрузки с учетом их деформированности и физического износа элементов конструкции и на их основе разработать рекомендации по применению конструктивных мероприятий.

Реализация предлагаемых рекомендаций по обеспечению сейсмической безопасности эксплуатируемых зданий дошкольных образовательных учреждений существенно уменьшит сейсмический риск и ущерб при возможных сильных землетрясениях.

### **3. Техническое обследование зданий**

В настоящее время в г.Ташкенте используются около 450 дошкольных учреждений, из них для проведения технического обследования выбраны здания ДОУ: №153; №219; №332 и №57, которые построены в разные периоды. Эти дошкольные учреждения были выбраны в соответствии с нормативными документами по проектированию зданий в сейсмических районах, действовавших в период их строительства и сейсмичности района строительства. Здесь приводятся результаты технического обследования строительных конструкций этих дошкольных образовательных учреждений и оценки соответствия объемно-планировочных и конструктивных решений их действующим нормам КМК 2.01.03-96 по проектированию зданий и сооружений в сейсмических районах.

Определение соответствия параметров зданий ДОУ из кирпичной кладки требованиям нормы КМК 2.01.03-96 проведено по следующим 10 предельным параметрам:

1 – длина здания (отсека); 2 – пролет стен; 3 – высота этажа; 4 – высота здания (количество этажей); 5 – шаг поперечных стен; 6 – разделение здания антисейсмическими швами на отсеки; 7 – отношение высоты этажа к толщине стены; 8 – число внутренних продольных стен; 9 – ширина простенков; 10 – ширина проемов.

Здание ДОУ №153 состоит из двух отдельных корпусов, построенных в разные годы. Здание основного блока было построено в 1935 г., без учета требований строительных норм и правил. Здание второго блока было построено в 1961 г. с учетом требований строительных норм и правил СН-8-57 [3]. Средний отсек здания построен из кирпичной кладки, а с боковых сторон пристроенные каркасные отсеки разделены с помощью антисейсмических швов. Конструктивная система зданий ДОУ определяется как жесткая бескаркасная с продольными и поперечными кирпичными стенами. Основные несущие конструкции зданий – кирпичные стены и рамные каркасы с различной толщиной по блокам в зависимости от года постройки. В 2015 г. в здании осуществлен капитальный ремонт. Сейсмичность площадки строительства составляет по карте микросейсморайонирования города Ташкента 8–9 баллов.

Сравнивая предельные и фактические параметры конструктивных систем, установили, что здание не соответствует требованиям нормы КМК 2.01.03-96 по данным перечисленным выше 1, 2, 4, 8 и 9 пунктам. Как видно из приведенных данных, половина из представленных параметров зданий ДОУ №153 не соответствует предельным параметрам нормы для зданий из кирпичной кладки II категории.

Здание ДОУ №219 состоит из трех блоков с теплыми переходами между блоками, из них групповые блоки построены в 1961 г. с учетом требований строительных норм и правил СН-8-57 [3]. Основные несущие конструкции зданий – кирпичные стены с различной толщиной по блокам. Конструктивная система здания нового третьего блока комбинированная, железобетонный каркас с кирпичным заполнением. Основные несущие конструкции – поперечные рамы, на которые опираются сборные многпустотные железобетонные плиты перекрытия и покрытия. В 2019 г. в здании ДОУ проводился капитальный ремонт. Сейсмичность площадки строительства по карте микросейсмрайонирования города Ташкента – 8 баллов.

Сравнивая предельные и фактические параметры зданий блоков 1 и 2, установили, что здания не соответствуют нормам КМК 2.01.03-96 по данным перечисленным выше 1, 2, 4, 5, 6, 8 и 9 пунктам. Из приведенных данных видно, что более половины фактических параметров зданий №219 не соответствуют предельным параметрам нормы для зданий из кирпичной кладки II категории.

Здание ДОУ №332 состоит из трех двухэтажных блоков, соединенных с помощью двух теплых переходов. Здание ДОУ было построено в 1965 г. с учетом требований строительных норм и правил СНиП II-A.12-62 [4]. Двухэтажные кирпичные здания блоков 1 и 2 предназначены для группового размещения детей, построены без подвальных помещений. Планировка и геометрические размеры блоков типичные. Здание блока 3 кирпичное – предназначено для административно-хозяйственного персонала ДОУ. Конструктивная система зданий ДОУ определяется как жесткая бескаркасная с продольными и поперечными кирпичными стенами. Основные несущие конструкции здания – кирпичные стены с различной толщиной по блокам. Теплые переходы – каркасные, расположены между блоками, однопролетные и одношаговые, разделены с помощью антисейсмического шва от основных блоков. В 2018 г. в здании осуществлен капитальный ремонт. Сейсмичность площадки строительства по карте микросейсмрайонирования города Ташкента – 8 – 9 баллов.

Сравнивая предельные и фактические параметры зданий блоков, установили, что здания блоков не соответствуют требованиям нормы КМК 2.01.03-96 по данным перечисленным выше 1, 2, 4, 5, 6, 8 и 9 пунктам. Как видно из приведенных данных, более половины из представленных параметров зданий ДОУ №332 не соответствуют предельным параметрам нормы для зданий из кирпичной кладки II категории.

Здание ДОУ №57 построено в 1974 г. в соответствии с требованиями строительных норм и правил СНиП II-A.12-69 [5] и состоит из двух блоков, разделенных между собой антисейсмическим швом. Здания блоков без подвалов, предназначены для групповых помещений детей и административно-хозяйственных бытовых помещений. Конструктивная система блоков здания ДОУ каркасная двухэтажная. Сейсмичность площадки строительства по карте микросейсмрайонирования города Ташкента – 8 баллов.

Параметры и фактические величины блоков ДОУ №57 сопоставлены с предельными, установленными нормами КМК 2.01.03-96, представленные в табл. 3.1 из [5] с учетом конструктивной схемы блоков как железобетонный каркас рамной системы. Анализ данных показывает, что здания блоков соответствуют нормам сейсмостойкого строительства по показателям объемно-планировочного и конструктивного решений. Окончательная оценка будет сделана по результатам инструментально-расчетных исследований, приведенных на последующих этапах.

Следовательно, из результатов сравнения предельных параметров по нормам КМК 2.01.03-96 и фактических параметров конструктивных систем видно, что здания трех дошкольных учреждений из четырех не полностью отвечают требованиям нормы сейсмостойкого строительства, кроме ДОУ №57.

Следует отметить, кроме перечисленных параметров обследованные здания ДОУ также по отдельным характеристикам конструктивных решений не отвечают требованиям нормы проектирования кирпичных зданий в сейсмических районах. Например, согласно п.3.5.12 КМК 2.01.03-96, в сопряжениях стен в кладках должны укладываться арматурные сетки с общей площадью сечения продольной арматуры  $1 \text{ см}^2$  длиной 1,5 м через 700 мм по высоте при расчетной сейсмичности 7–8 баллов и 500 мм – при сейсмичности 9 баллов и более.

Участки стен и столбцы над чердачными перекрытиями, имеющие высоту более 400 мм, должны быть армированы и усилены монолитными железобетонными включениями, заанкеренными в антисейсмический пояс.

По результатам визуальных обследований, в несущих и ненесущих конструкциях зданий ДОУ не обнаружены дефекты и повреждения, снижающие их несущие способности, кроме волосяных трещин и отслоения штукатурки, следы утечки воды в отдельных местах. В целом техническое состояние строительных конструкций зданий ДОУ можно принять как удовлетворительное.

Во многих ДОУ по периметру зданий из-за некачественной обратной засыпки грунта без уплотнения наблюдалась неравномерная деформация асфальтобетонного покрытия. В результате произошли растрескивание и отколы бетонного покрытия, что может привести к повреждению цокольной части стен и попаданию воды в около - и под фундаментное пространство. По периметру отдельных зданий ДОУ асфальтобетонная отмостка полностью изношена.

#### **4. Динамические характеристики зданий**

Методики инструментального измерения динамических характеристик зданий и информация об измерительном комплексе приведены в научно-технических отчетах [8]. В отчетах приведены структура мобильной инженерной станции, разработанной в 2016 г. авторами данной статьи, подготовка её к эксплуатации, методика калибровки измерительных каналов, методика регистрации колебания объекта при динамических процессах. Здесь кратко приводятся основные принципы и результаты измерения динамических характеристик зданий дошкольных образовательных учреждений №153, №219, №332, №57 г.Ташкента, а также сопоставительный анализ полученных инструментальных данных.

При определении динамических характеристик зданий в микросейсмическом режиме в составе измерительного комплекса в качестве регистрирующих приборов были использованы сейсмометры СМ-3 [8]. Мобильная инженерная станция имеет индивидуальное питание и организуется на местах установки этих сейсмических датчиков. Как правило, сейсмические датчики устанавливаются на полу верхнего этажа, если пол имеет жесткое покрытие (бетон, мрамор, кафель и др.). Если пол деревянный или покрыт разными материалами (линолеумы и т.п.), то датчики можно устанавливать на подоконниках в несущих стенах верхнего этажа, так как деревянные (мягкие) полы из-за гибкости не идентифицирует микросейсмические колебания здания.

В случае одноэтажного здания сейсмические датчики устанавливаются на чердаке в середине здания при железобетонных покрытиях. При деревянных перекрытиях датчики следует установить на верхнем торце несущих стен, предварительно очищая места их установки.

Сейсмометры СМ-3 устанавливают на выбранных местах во взаимно перпендикулярном направлении в соответствии с главными осями здания, при этом характеристики датчиков должны быть идентичными и период собственных колебаний маятника датчиков

должен быть в пределах 2.0 с. Соединяются датчики с блоком регистрации и ноутбуком. Для определения чувствительности измерительных каналов производятся тестовые записи колебания зданий в микросейсмическом режиме.

При инструментальных измерениях наблюдения за микросейсмическими колебаниями зданий на мониторе ноутбука будут продолжены до тех пор, пока на экране не появятся четкие записи собственных колебаний здания. Этот процесс повторяется несколько раз для повышения точности зарегистрированных инструментальных данных.

С помощью мобильной инженерной станции проводились серии инструментальных измерений микросейсмических колебаний зданий ДОУ №153, №219, №332, №57 по изложенной методике на основе цифровой регистрации по системе «сейсмометр + усилители + АЦП + ПК + ПО». Для записи сигналов сейсмометров СМ-3 и их просмотра на ноутбуке использовался язык программирования Processing 2.1, производный от языка программирования JAVA. Для регистрации сигналов сейсмометров создана программа, позволяющая одновременно проводить запись по каналам и просмотр записанной информации в графическом виде. Имеется также возможность для детального анализа сигналов сейсмометров в редакторе Excel [8].

В табл. №1 по результатам обработки и анализа инструментальных измерений микросейсмических колебаний зданий ДОУ №153, №219, №332, №57 приведены периоды и декременты затухания собственных колебаний в поперечном и продольном направлениях. Сопоставлением полученных инструментальных данных можно оценить жесткости конструктивной системы зданий по главным осям. Например, периоды и декременты затухания колебаний блока 1 и блока 2 ДОУ №153 в поперечном направлении имеют одинаковые значения, т.е. блоки в поперечном направлении обладают одинаковой жесткостью. В продольном направлении период и коэффициент затухания колебаний блока 1 больше, чем блока 2, т.е. в этом направлении конструкция блока 1 имеет меньше жесткости по сравнению с блоком 2.

Таблица 1

| Периоды и декременты колебания |                  |                       |                  |                       |                  |                       |                  |
|--------------------------------|------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|------------------|
| Т <sub>поп</sub> , с.          | δ <sub>поп</sub> | Т <sub>про</sub> , с. | δ <sub>про</sub> | Т <sub>поп</sub> , с. | δ <sub>поп</sub> | Т <sub>про</sub> , с. | δ <sub>про</sub> |
| <b>ДОУ №153</b>                |                  |                       |                  |                       |                  |                       |                  |
| <b>Блок 1</b>                  |                  |                       |                  | <b>Блок 2</b>         |                  |                       |                  |
| 0.16                           | 0.27             | 0.19                  | 0.17             | 0.17                  | 0.29             | 0.16                  | 0.30             |
| <b>ДОУ №219</b>                |                  |                       |                  |                       |                  |                       |                  |
| <b>Блок 1</b>                  |                  |                       |                  | <b>Блок 2</b>         |                  |                       |                  |
| 0.18                           | 0.14             | 0.18                  | 0.16             | 0.16                  | 0.20             | 0.14                  | 0.26             |
| <b>ДОУ №332</b>                |                  |                       |                  |                       |                  |                       |                  |
| <b>Блок 1</b>                  |                  |                       |                  | <b>Блок 2</b>         |                  |                       |                  |
| 0.20                           | 0.27             | 0.20                  | 0.27             | 0.20                  | 0.35             | 0.20                  | 0.30             |
| <b>ДОУ №332</b>                |                  |                       |                  | <b>ДОУ №57</b>        |                  |                       |                  |
| <b>Блок 3</b>                  |                  |                       |                  | <b>Блок 1</b>         |                  |                       |                  |
| 0.20                           | 0.22             | 0.20                  | 0.22             | 0.20                  | 0.21             | 0.26                  | 0.13             |

В качестве примера на рис.1 показан момент регистрации микросейсмических колебаний кирпичных зданий блока 1 (а) и блока 2 (б) ДОУ №153 и записи микросейсмических колебаний блоков на мониторе ноутбука. Сейсмические датчики были установлены на полу коридора второго этажа (а) в кирпичных двухэтажных зданиях, находящихся отдельно друг от друга. Блоки разделены на отсеки, поэтому датчики были установлены на полу основного отсека с учетом конструктивного решения зданий. На рис. 2 приведена часть записи поперечных и продольных микросейсмических колебаний блоков, которые были обработаны и анализированы в редакторе Excel.



Рис.1. Момент регистрации микросейсмических колебаний зданий ДОУ №153: *а* – блок 1; *б* – блок 2

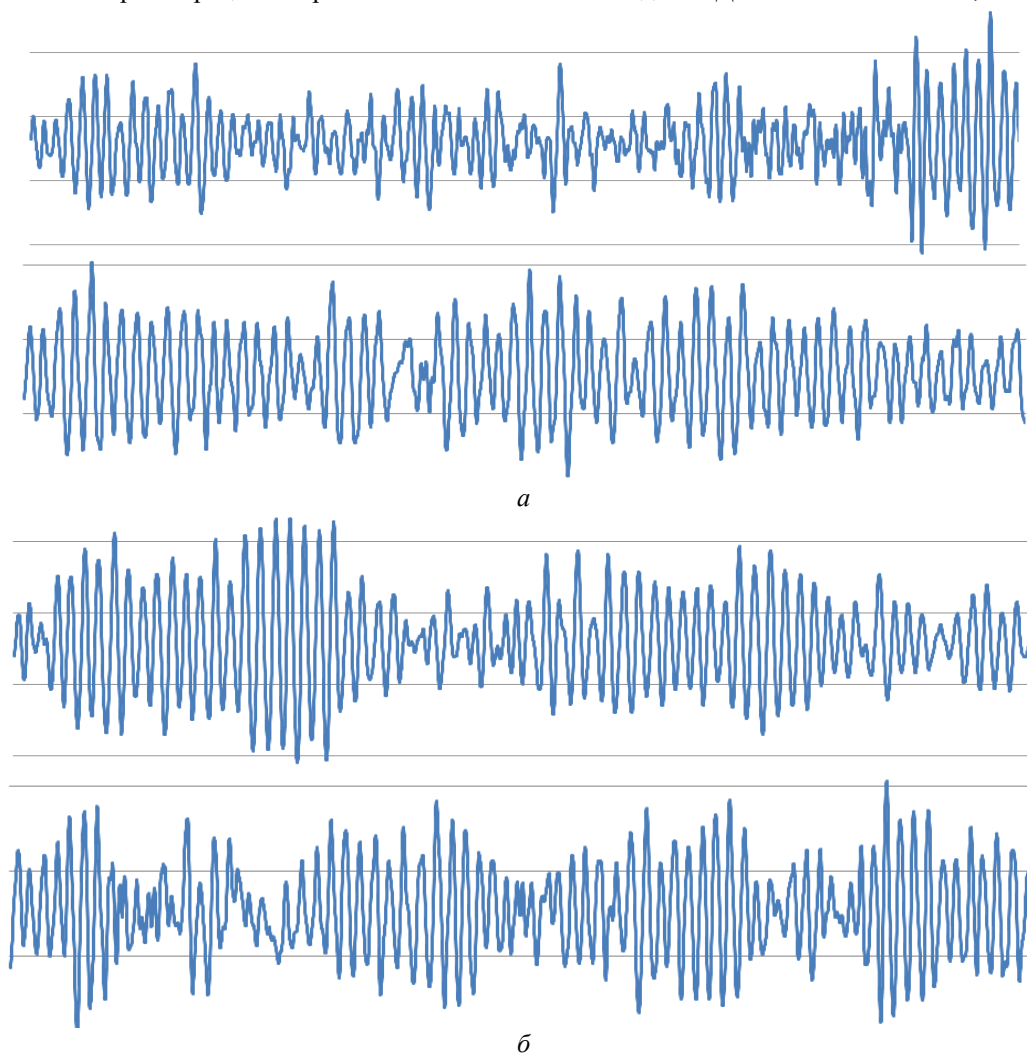


Рис.2. Микросейсмические поперечные и продольные колебания зданий ДОУ №153: *а* – блок 1; *б* – блок 2

## 5. Механические свойства грунта

Как известно, для выявления упругих свойств грунта расчетным путем [12] необходимо определить скорости распространения продольных и поперечных волн в грунте, а также естественную плотность грунта. Скорости распространения волн в грунте и есте-

ственная плотность грунта определяются инструментальными методами в натурных и лабораторных условиях.

При инструментальных исследованиях по определению скорости распространения продольных и поперечных волн в грунте, в натурных условиях вдоль поверхности строительной площадки дошкольных учреждений на определенном расстоянии друг от друга расставляются сейсмические датчики, которые имеют идентичные характеристики. На некотором расстоянии от первой измерительной точки (ИТ1) создается возмущение, в результате которого в грунтовой среде распространяются волны, например, удар кувалдой в грунт, сброс груза с некоторой высоты или опытные взрывы небольшой мощности.

Сейсмические приборы, установленные на измерительных точках ИТ1, ИТ2 и ИТ3, фиксируют по очереди время вступлений  $t_{1p}$ ,  $t_{2p}$ ,  $t_{3p}$  и  $t_{1s}$ ,  $t_{2s}$ ,  $t_{3s}$  соответственно фронтам продольных и поперечных волн вдоль площадки. С помощью записей, произведенных мобильной инженерной станцией, из разницы моментов вступления волн по пунктам наблюдений  $\Delta t = \Delta t_{i+1} - \Delta t_i$  с учетом расстояний между ними вычисляются скорости распространения продольных и поперечных волн по строительной площадке, которые позволяют вычислить другие характеристики грунта.

По значениям разницы во времени вступления волны по измерительным точкам определяли скорости распространения продольных и поперечных волн по следующим формулам:

$$C_p = L/\Delta t_p, \quad C_s = L/\Delta t_s, \quad (1)$$

где  $C_p$  и  $C_s$  – скорость продольных и поперечных волн;  $L$  – расстояния между пунктами наблюдений;  $\Delta t_p$  и  $\Delta t_s$  – время вступления продольных и поперечных волн.

По полученным инструментальным данным по формулам [12] вычислены другие физико-механические свойства грунта:

$$\mu = (C_p^2 - 2C_s^2)/2(C_p^2 - C_s^2), \quad E_e = \gamma C_s^2 (3C_p^2 - 4C_s^2)/2g(C_p^2 - C_s^2), \quad (2)$$

$$\sigma_{cd} = C_s^2 \gamma / g, \quad K = (C_p^2 - \frac{4}{3}C_s^2) \gamma / g, \quad \lambda = (C_p^2 - 2C_s^2) \gamma / g, \quad G_e = C_p \gamma / g. \quad (3)$$

В формулах (1) – (3) приняты следующие обозначения:  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\text{м/с}^2$ ,  $\gamma = 1.8 \text{ т/м}^3$  – объемный вес грунта;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $E_e$  – модуль деформации;  $\sigma_{cd}$  – модуль сдвига;  $K$  – модуль объемного сжатия;  $\lambda$  – константа Ламе;  $G_e$  – акустическая жесткость.

В табл.2 приведены значения скорости распространения продольных и поперечных волн в грунте строительных площадок ДООУ №153, №219, №332, №57, декремент затухания ( $\alpha$ ) и резонансная частота ( $\omega_0$ ) колебания грунта, а также расчетные данные, вычисленные по формулам (2) – (3).

Таблица 2

Измеренные и расчетные данные грунта строительных площадок ДООУ

| Инструментально измеренные данные |             |                 |          | Расчетные данные по формулам (2) – (3) |                            |                                    |                          |                                |                               |
|-----------------------------------|-------------|-----------------|----------|----------------------------------------|----------------------------|------------------------------------|--------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| $C_p$ , м/с                       | $C_s$ , м/с | $\omega_0$ , Гц | $\alpha$ | $\mu$                                  | $E_e$ , кГ/см <sup>2</sup> | $\sigma_{cd}$ , кГ/см <sup>2</sup> | $K$ , кГ/см <sup>2</sup> | $\lambda$ , кГ/см <sup>2</sup> | $G_e$ , кГ/см <sup>3</sup> ·с |
| ДООУ №153                         |             |                 |          |                                        |                            |                                    |                          |                                |                               |
| 400                               | 200         | 6               | 0.26     | 0.33                                   | 980                        | 735                                | 1959                     | 1469                           | 0.07                          |
| ДООУ №219                         |             |                 |          |                                        |                            |                                    |                          |                                |                               |
| 800                               | 400         | 10.0            | 0.30     | 0.33                                   | 3918                       | 2939                               | 7837                     | 5878                           | 0.15                          |
| ДООУ №332                         |             |                 |          |                                        |                            |                                    |                          |                                |                               |
| 267                               | 172         | 5.6             | 0.22     | 0.15                                   | 622                        | 543                                | 585                      | 223                            | 0.05                          |
| Школа №57                         |             |                 |          |                                        |                            |                                    |                          |                                |                               |
| 300                               | 172         | 5.0             | 0.20     | 0.26                                   | 617                        | 544                                | 929                      | 566                            | 0.06                          |

В качестве примера на рис.3 показаны сейсмические датчики, расставленные через 10 м и момент регистрации колебаний грунта строительной площадки при ударе кувалдой по грунту. На рис.4 показаны записи колебания грунта строительной площадки при серии ударов (а) и разового удара (б) кувалдой по грунту.



Рис.3. Момент регистрации колебаний грунта

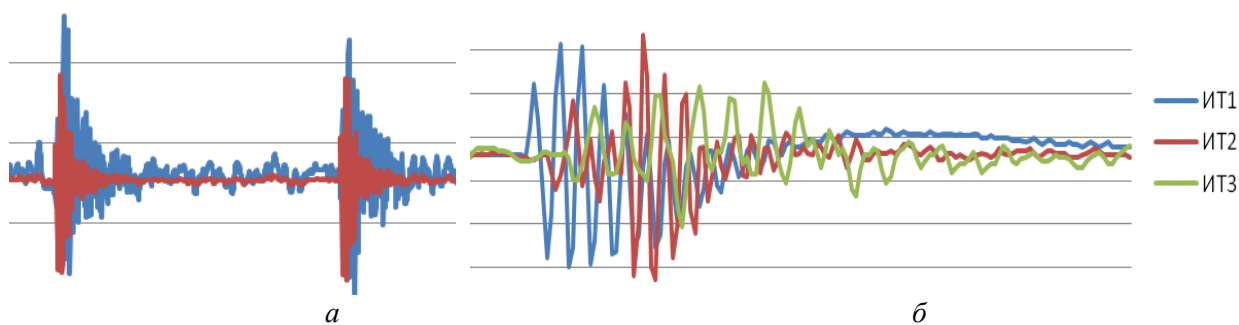


Рис.4. Записи колебания грунта строительной площадки

Как видно из приведенных в табл.2 данных, строительные площадки дошкольных образовательных учреждений состоят из грунтов, существенно отличающиеся по физико-механическим свойствам. По результатам инструментально-расчетных данных сейсмичность строительной площадки ДООУ №219 можно отнести к 8 - балльной зоне, а грунт площадки по сейсмическим свойствам – ко второй категории. Сейсмичность строительных площадок остальных дошкольных образовательных учреждений следует отнести к 8–9 - балльной зоне, а грунты – к третьей категории по сейсмическим свойствам.

## 6. Поверочные расчеты зданий

Для достоверной оценки сейсмостойкости зданий дошкольных учреждений необходимо провести расчетные исследования с использованием результатов предварительных исследований и инструментальных данных. На основе обобщения результатов обмерно - обследовательских и инструментально-расчетных исследований будут разработаны общие рекомендации для оценки сейсмического риска и уменьшения ущерба в дошкольных образовательных учреждениях г. Ташкента при возможных сильных землетрясениях.

Приведем общие нормативные данные зданий и территорий дошкольных учреждений.

При расчетах приняты следующие данные:

- сейсмичность региона и строительной площадки – 8 баллов (КМК 2.01.03-96, Приложение 2);
- нормативная снеговая нагрузка: I – район  $s_0=0.50$  кПа ( $50 \text{ кгс/м}^2$ ) (КМК 2.01.07-96, Приложение 5);

- нормативный скоростной напор ветра: I – район  $W_0=0.38$  кПа (38 кгс/м<sup>2</sup>) (КМК 2.01.07-96, Приложение 5), тип местности – В;
- класс ответственности здания – I (первый);
- коэффициент надежности по назначению  $\gamma_n=1$  (КМК 2.01.07-96, Приложение 7);
- категория ответственности здания – II (вторая);
- коэффициент ответственности  $K_o=1.2$  (КМК 2.01.03-96, табл. 2.3.);
- грунты основания – лёссовидные суглинки. Категория грунтов по сейсмическим свойствам – II (вторая).

*Исходные показатели зданий.* Используемые при расчетах исходные показатели зданий по нормативному документу КМК 2.01.03-96 приведены в табл.3.

*Прочностные и механические характеристики материалов.* При строительстве зданий ДООУ использованы кирпич марки М75 и раствор марки М50. Категория кладки на основе прочностных характеристик кладки по КМК 2.01.03-96 составляла II с временным расчетным сопротивлением осевому растяжению по неперевязанным швам (нормальное сцепление)  $1.2 \text{ кгс/см}^2 \leq R_{tb} < 1.8 \text{ кгс/см}^2$ .

По СНиП II-22-81\* “Каменные и армокаменные конструкции” расчетные сопротивления кладки по осевому растяжению и сжатию составляют:

расчетное сопротивление кладки на сжатие  $R=13 \text{ кгс/см}^2$  (СНиП II-22-81\*, табл.5.2);

осевое расчетное сопротивление по неперевязанному сечению (нормальное сцепление, в горизонтальном направлении)  $R_t=0.8 \text{ кгс/см}^2$  (СНиП II-22-81\*, табл.2);

Таблица 3

**Исходные показатели зданий**

| №  | Наименование расчетных показателей                                       | Коэффициент  |
|----|--------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1  | Количество учитываемых форм колебаний                                    | 10           |
| 2  | Матрица масс                                                             | Диагональная |
| 3  | Поправочный коэффициент для сейсмических сил                             | 1.0          |
| 4  | Коэффициент ответственности сооружения (КМК 2.01.03-96, табл. 2.3)       | 1.2          |
| 5  | Коэффициент учета повторяемости землетрясений (КМК 2.01.03-96, табл.2.4) | 1.2          |
| 6  | Коэффициент этажности сооружения (КМК 2.01.03-96, табл.2.10)             | 1.0          |
| 7  | Коэффициент регулярности, п.2.25 (КМК 2.01.03-96, табл. 2.12)            | 1.0          |
| 8  | Коэффициент сейсмичности площадки (КМК 2.01.03-96, табл. 2.7)            | 0.5          |
| 9  | Индекс региона (КМК 2.01.03-96, табл. 2.2)                               | II           |
| 10 | Категория грунта, табл. 1.1 (КМК 2.01.03-96, табл.1.1)                   | II           |
| 11 | Декремент колебания, (КМК 2.01.03-96, табл. 2.9)                         | 0.3          |

осевое расчетное сопротивление по первязанному сечению (нормальное сцепление, в вертикальном направлении)  $R_t=1.6 \text{ кгс/см}^2$ ;

расчетное сопротивление кладки растяжению при изгибе по неперевязанному сечению  $R_{tb}=1.2 \text{ кгс/см}^2$  (СНиП II-22-81\*, табл.10);

расчетное сопротивление кладки растяжению при изгибе по перевязанному сечению  $R_{tb}=2.5 \text{ кгс/см}^2$ ;

расчетное сопротивление главным растягивающим напряжением по швам кладки по неперевязанному сечению  $R_{tw}=1.2 \text{ кгс/см}^2$  (СНиП II-22-81\*, табл.10);

расчетное сопротивление главным растягивающим напряжением по швам кладки по перевязанному сечению  $R_{tw}=2.5 \text{ кгс/см}^2$ ;

расчетное сопротивление кладки срезу по горизонтальному неперевязанному сечению (касательное сцепление)  $R_{sq}=1.6 \text{ кгс/см}^2$  (СНиП II-22-81\*, табл.10);

расчетное сопротивление кладки срезу по вертикальному перевязанному сечению (в вертикальном направлении)  $R_{sq}=2.4 \text{ кгс/см}^2$ .

Механические характеристики кирпичной кладки вычислены по выражениям, приведенным в СНиП II-22-81\*. Модуль упругости кирпичной кладки по СНиП II-22-81\* определяется в следующем виде:

$$E_0 = \alpha \cdot k \cdot R,$$

где коэффициент  $k$ , характеризующий вид кладки, принимается равным 2, а также коэффициент  $\alpha$ , характеризующий упругость кладки, принимается равным 1000 на основе прочностных характеристик кирпичной кладки;  $R$  – расчетное сопротивление кладки на сжатие.

В результате расчета по полученным коэффициентам кирпичной кладки модуль упругости составляет:  $E_0 = 1000 \cdot 2 \cdot 13 = 26000$  кгс/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона кирпичной кладки равен:  $\mu = 0.25$ , а удельный вес кирпичной кладки  $\gamma = 1800$  кгс/м<sup>3</sup>.

Для бетонных изделий получены следующие механические свойства:  $E = 300000$  кгс/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu = 0.2$ , удельный вес бетона  $\gamma = 2500$  кгс/м<sup>3</sup>.

## 7. Сбор нагрузок

При сборе внешних нагрузок получено всего 6 загрузений, в том числе два сейсмических, соответствующие поперечному  $X$  и продольному  $Y$  направлениям.

Поверочный расчет зданий выполнен на основное и особое сочетание нагрузок.

*Загрузка 1.* Постоянные нагрузки (собственный вес здания задается автоматически с коэффициентом надежности  $\gamma_f = 1.1$ ).

*Загрузка 2.* Постоянные нагрузки – круглые многопустотные плиты, покрытия, перекрытия, утеплитель, пол, перегородка, профнастил, стропила, прогон и др. (табл. 4).

Таблица 4

Сбор нагрузок

| №    | Наименование нагрузок                                                  | Ед. изм.           | Нормативное значение | Коэффициент условной работы | Расчетное значение     |
|------|------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------|-----------------------------|------------------------|
| 1.   | Постоянные на покрытие                                                 |                    |                      |                             |                        |
| 1.1. | Профнастил Н57-750-0.8                                                 | кгс/м <sup>2</sup> | 5                    | 1.05                        | 5.25                   |
| 1.2. | Сплошные прогоны длиной 6 м и 3 м                                      | кгс/м              | 24                   | 1.05                        | 25.2                   |
| 1.3. | Утеплитель – керамзит $t=150$ мм;<br>$\gamma=800$ кг/м <sup>3</sup>    | кгс/м <sup>2</sup> | 120                  | 1.3                         | 156                    |
| 1.4. | Цементно-песчаная стяжка<br>$t=30$ мм; $\gamma=1800$ кг/м <sup>3</sup> | кгс/м <sup>2</sup> | 54                   | 1.3                         | 70                     |
| 1.5. | Плита перекрытия многопустотная толщиной 220 мм                        | кгс/м <sup>2</sup> | 300                  | 1.1                         | 330                    |
|      | Всего                                                                  |                    |                      |                             | 556 кгс/м <sup>2</sup> |
| 2.   | Постоянные на перекрытии                                               |                    |                      |                             |                        |
| 2.1. | Цементно-песчаная стяжка<br>$t=40$ мм; $\gamma=1800$ кг/м <sup>3</sup> | кгс/м <sup>2</sup> | 72                   | 1.3                         | 94                     |
| 2.2. | Покрытие пола (линолеум или керамическая плитка)                       | кгс/м <sup>2</sup> | 10                   | 1.2                         | 12                     |
| 2.3. | Перегородки (кирпичная кладка)                                         | кгс/м <sup>2</sup> | 100                  | 1.2                         | 120                    |
| 2.4. | Плита перекрытия многопустотная толщиной 220 мм                        | кгс/м <sup>2</sup> | 300                  | 1.1                         | 330                    |
|      | Всего                                                                  |                    |                      |                             | 556 кгс/м <sup>2</sup> |
| 3.   | Длительная                                                             |                    |                      |                             |                        |
| 3.1. | Полезная                                                               | кгс/м <sup>2</sup> | 150                  | 1.3                         | 195                    |
| 4.   | Кратковременная                                                        |                    |                      |                             |                        |
| 4.1. | Снег                                                                   | кгс/м <sup>2</sup> | 50                   | 1.4                         | 70                     |

*Загрузка 3.* Длительная – полезная нагрузка (с коэффициентом надежности  $\gamma_f = 1.3$  по КМК 2.01.07-96, см. пункт 3.10-3.11).

*Загрузка 4.* Кратковременная нагрузка – снег (с коэффициентом надежности  $\gamma_f = 1.4$  по КМК 2.01.07-96, см. пункт 5.7).

*Загрузки 5 и 6.* Сейсмическая нагрузка по осям X и Y по карте микросейсмозонирования города Ташкента – 8 баллов.

Сбор нагрузок приведен в табл.4.

Используя исходные материалы и результаты инструментально - обследовательских работ, расчетные исследования зданий ДОУ №153, №219, №332, №57 на сейсмические воздействия выполнены с помощью программного комплекса ЛИРА 9.6. Расчетные схемы зданий дошкольных учреждений приведены на рис.5, как пространственная схема с соответствующими конечными элементами.

С помощью программного комплекса ЛИРА 9.6 вычислены собственные периоды и частоты колебания, перемещения и напряжения в конструкциях стен зданий дошкольных образовательных учреждений №153, №219, №332 и №57 при сейсмической интенсивности воздействия 8 баллов.

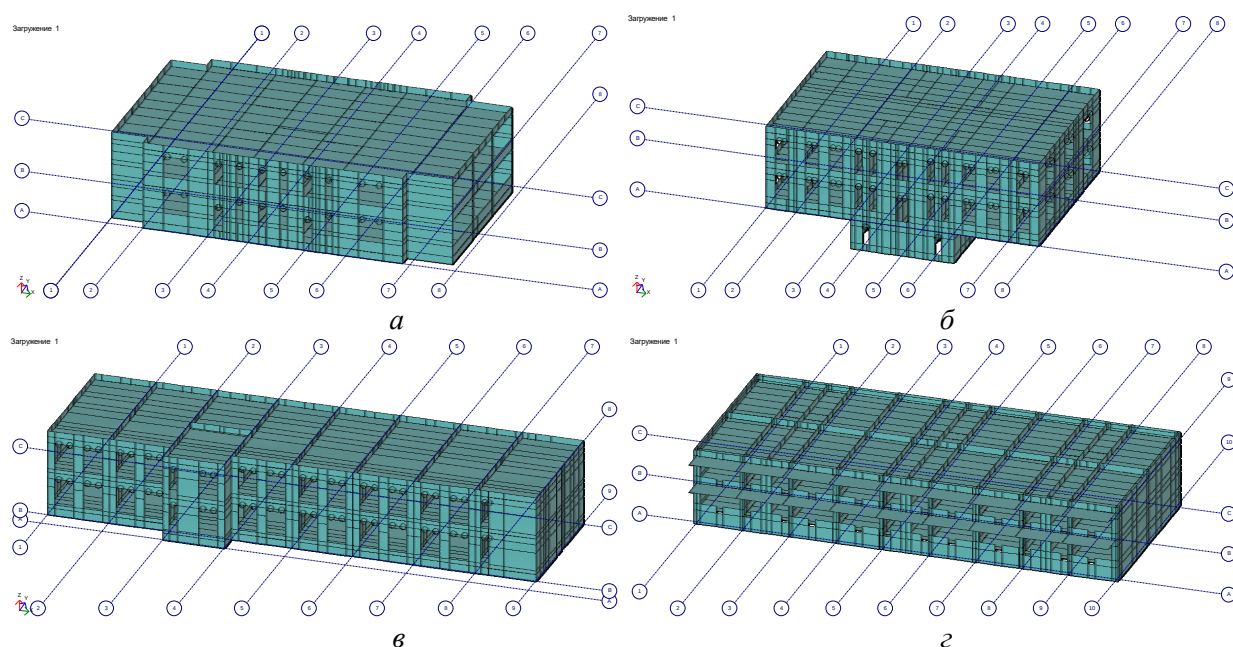


Рис.5. Расчетные схемы зданий ДОУ: а – №153; б – №219; в – №332; г – №57

На рис. 6 и 7 приведены эпюры максимальных значений перемещений и напряжений в кладке стен зданий дошкольных образовательных учреждений №153, №219, №332 и №57 при сейсмической интенсивности воздействия 8 баллов. На рис.7 (г) приведены значения напряжений в кирпичных заполнениях между колоннами здания ДОУ №57 при сейсмических воздействиях. На рис.8 приведены мозаика перемещений каркаса здания ДОУ №57 в продольном и поперечном направлениях.

Проведены сопоставления теоретически вычисленных и инструментально-измеренных значений динамических характеристик и анализ вычисленных значений перемещений и напряжений в кладке стен зданий дошкольных учреждений при сейсмическом воздействии 8 баллов.

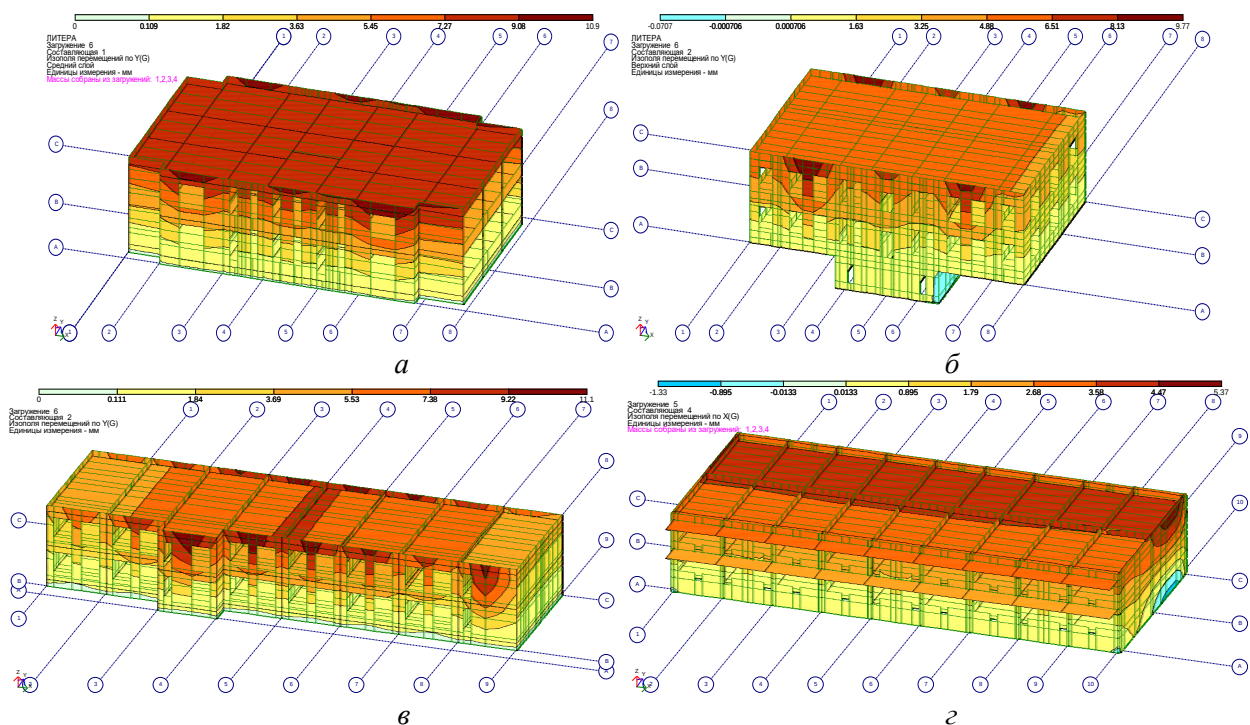


Рис.6. Максимальные перемещения зданий ДОУ: а –№153; б –№219; в –№332; г –№57

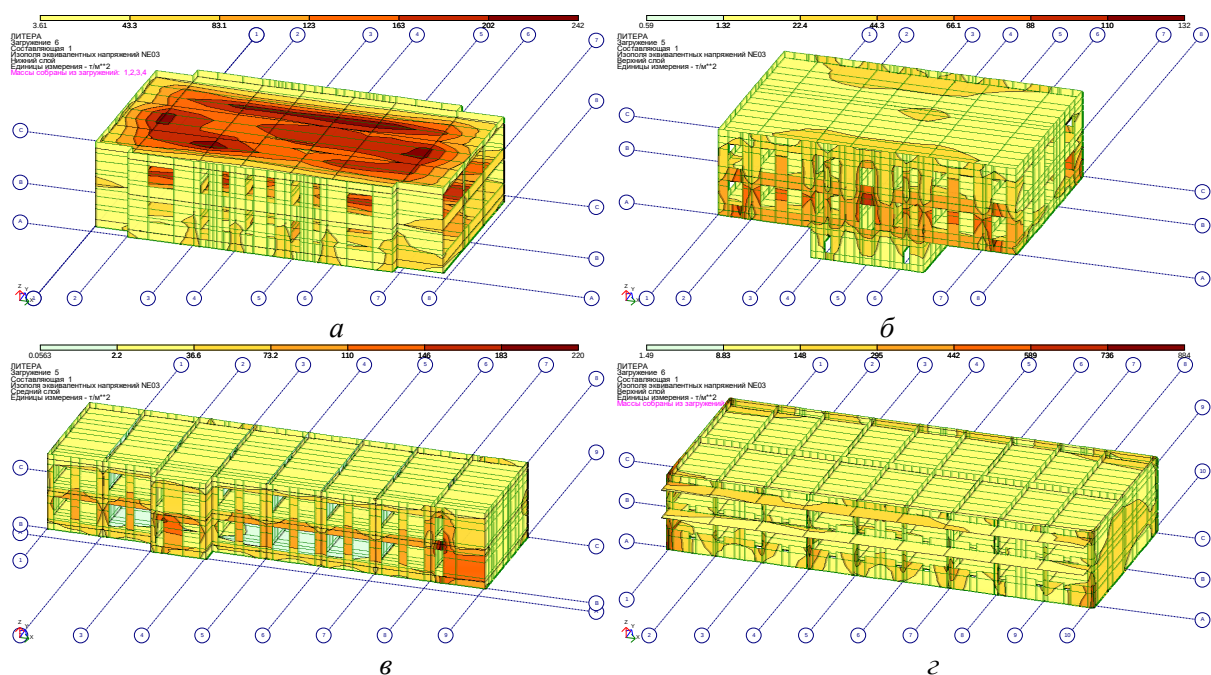


Рис.7. Напряжения в кирпичной кладке стен зданий ДОУ а –№153; б –№219; в –№332  
и в кирпичных заполнениях между колонн здания ДОУ г – №57

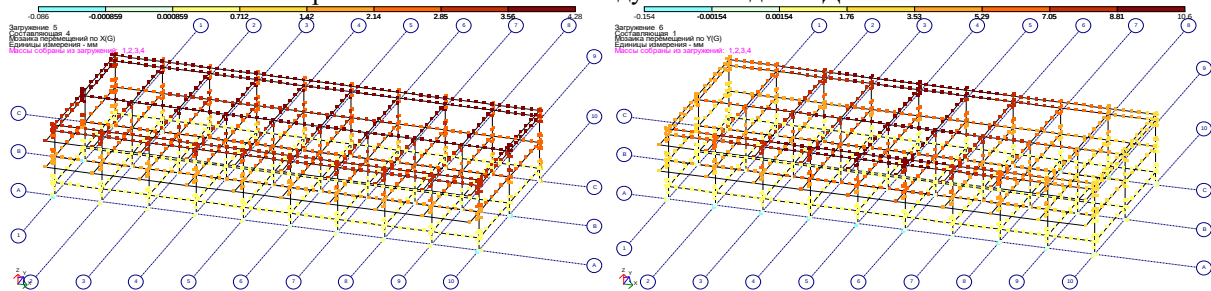


Рис.8. Мозаика перемещений каркаса здания ДОУ №57 в продольном и поперечном направлениях

## 8. Заключение и рекомендации

Установлено, что период основного тона собственных колебаний зданий при теоретических расчетах немного больше, чем полученные периоды при измерениях микросейсмических колебаний, а значения декремента затухания намного меньше. Это расхождение объясняется тем, что в режиме микроколебаний динамическая жесткость определяется начальным модулем упругости, который всегда больше расчетного.

Для рассмотренных кирпичных зданий дошкольных образовательных учреждений результаты вычислений и их анализ показали, что значения перемещений стен зданий в продольном и поперечном направлениях в пределах норм КМК 2.01.03-96, а полученные напряжения в кладке стен в несколько раз превышают расчетное сопротивление на осевое растяжение (нормальное сцепление) по неперевязанным швам кладки.

Для обеспечения сейсмической безопасности и дальнейшей нормальной эксплуатации кирпичных зданий, исследованных дошкольных образовательных учреждений, обязательными конструктивными мероприятиями при реконструкции являются обрамления проемов, армирование простенков и в местах сопряжения продольных и поперечных стен. Конструктивные мероприятия по усилению должны осуществляться на основании проектных работ и сопровождаться поверочными расчетами зданий на сейсмические воздействия.

В целом двухэтажные каркасно-панельные здания дошкольных образовательных учреждений отвечают требованиям КМК 2.01.07-96, кроме напряжения в стенах кирпичного заполнения, участвующего в работе каркаса.

Анализ последствия прошедших сильных землетрясений показал, что в кирпичных заполнениях каркасных зданий возникают трещины между колоннами и кирпичными стенами, а иногда происходит отклонение кирпичных заполнений от вертикальной оси.

При проведении капитального ремонта (реконструкции) каркасных зданий дошкольных образовательных учреждений рекомендуется применять конструктивные мероприятия в виде армирования кирпичных заполнений с привязкой к колонне, участвующих в работе каркаса при сейсмических воздействиях.

Все работы по усилению и восстановлению строительных конструкций необходимо выполнять в строгом соответствии с указаниями КМК 3.01.02-00 “Техника безопасности в строительстве”, КМК 3.03.01-98 “Несущие и ограждающие конструкции” и КМК 3.01.05-99 “Правила производства и приемки работ”, а также проекта производства работ, разработанного исполнителем работ.

Производство ремонтно-восстановительных работ необходимо выполнять при отсутствии динамических нагрузок от подъемно-транспортного и технологического оборудования и кратковременных нагрузок, а также при максимально-возможном уменьшении временных длительно-действующих нагрузок, оказывающих влияние на усиление или восстановление конструкции.

Все работы по усилению и восстановлению строительных конструкций должны выполняться с организацией пооперационного контроля качества работ с оформлением необходимых актов и другой документации, согласно действующим нормам.

Использование приведенных данных в практике и реализация предлагаемых рекомендаций по обеспечению сейсмической безопасности эксплуатируемых зданий дошкольных образовательных учреждений существенно уменьшит сейсмический риск и ущерб при возможных сильных землетрясениях.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] ТУ-58-48. Технические условия проектирования зданий и сооружений для сейсмических районов. Министерство строительства предприятий тяжелой промышленности СССР. М.: Стройиздат, 1949 г. Дата начала действия: 30 декабря 1948г.
- [2] ПСП 101-51. Положение по строительству в сейсмических районах. Госстройиздат, 1951. Введен 01.11.1951 г.

- [3] СН-8-57. Нормы и правила строительства в сейсмических районах. Госстройиздат, 1957. Введен 01.11.1957 г.
- [4] СНиП II-A.12-62. Строительство в сейсмических районах. Госстройиздат, 1963. Введен 01.03.1963 г.
- [5] СНиП II-A.12-69. Строительство в сейсмических районах. Госстрой СССР. М.: Стройиздат, 1970. Введен 01.07.1970 г.
- [6] СНиП II-7-81. Строительство в сейсмических районах. Госстрой СССР. М.: Стройиздат, 1982. Введен 01.01.1982 г.
- [7] КМК 2.01.03-96. Строительство в сейсмических районах. Госкомархитектстрой РУз. Ташкент, 1996. Введен 01.03.1996 г.
- [8] Отчет о научно-исследовательской работе: ФА-Атех-2018-(23+65) - «Оценка сейсмостойкости зданий школьных и дошкольных учреждений, построенных в соответствии с требованиями действовавших нормативных документов в период их строительства и разработка методов расчета сейсмостойкости с учетом их пространственных моделей и комплексной сейсмозащиты». Ташкент, 2018–2020 гг. ИМиСС АН РУз, 1073 с.
- [9] Сагдиев Х.С., Тешабоев З.Р., Ювмитов А.С., Галиаскаров В.А., Шерниёзов Х.О., Мирзакабиров Б.Н. Оценка соответствия школьных зданий нормам сейсмостойкого строительства. ISSN 2010-7250 // Журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2019. №1. – С.53–58.
- [10] Сагдиев Х.С. Методическая рекомендация для разработки технических паспортов зданий и сооружений. Журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2019. №1. – С. 90–95.
- [11] Сагдиев Х.С., Тешабоев З.Р., Галиаскаров В.А., Ювмитов А.С., Шерниёзов Х.О., Мирзакабиров Б.Н. Расчет зданий общеобразовательных школ на сейсмические воздействия и рекомендации по обеспечению их безопасной эксплуатации. Журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2020. №1. – С. 29–34.
- [12] Красников Н.Д. Динамические свойства грунтов и методы их определения. Л.: Стройиздат, 1970.

Дата поступления  
28.05.2021

**Сагдиев Х.С., Ювмитов А.С., Тешабоев З.Р., Галиаскаров В.А., Шерниёзов Х.О., Мирзакабиров Б.Н., Собиров З.Ж. Тошкент шаҳридаги мактабгача таълим муассасалари биноларини сейсмик хавфсизлиги ва улардан келгусида фойдаланиш бўйича тавсиялар.**

**Аннотация:** Мақолада мактабгача таълим муассасалари биноларини қурилиш даврида фойдаланилган қурилиш меъёрлари ва қоидаларига мос равишда классификацияси келтирилган. Биноларнинг қурилиш конструкцияларини техник кўриқдан ўтказиш натижалари ҳамда ҳажмий-режа ва конструктив ечимларининг ҳозирги кунда амалда бўлган бино ва иншоотларни сейсмик ҳудудларда лойиҳалаш меъёрларига мослиги баҳоланган. Биноларнинг динамик характеристикалари ва уларнинг қурилиш майдонлари грунтларининг физик-механик хусусиятлари аниқланган ва олинган инструментал маълумотлар таҳлил қилинган. Биноларнинг сейсмик кучлар таъсирига ҳисоблаш асосида сеймик мустаҳкамлигини баҳолаш натижалари, кучли ер қимирлашларида биноларнинг сейсмик хавфсизлигини таъминлаш ва шикастланишларини камайтириш бўйича хулосалар ва тавсиялар келтирилган.

**Калим сўзлар:** бинолар сейсмик мустаҳкамлиги; техник кўриқдан ўтказиш; инструментал-ҳисоблаш тадқиқи.

**Sagdiev H.S., Yuvmitov A.S., Teshaboev Z.R., Galiaskarov V.A., Sherniyozov H.O., Mirzakabilov B.N., Sobirov Z.Z. Assessment of seismic safety of preschool educational institutions of the city of Tashkent and recommendations for their further operation**

**Abstract:** In this article, the classification of the pre-school buildings was given in accordance with the construction standards and regulations in force at the time of their construction. The results of the technical inspection of the building and structures and assessment of the compliance of their space-planning and constructive solutions with the existing regulations on the design of buildings and structures in seismic areas are presented. The dynamic characteristics of the buildings and physical and mechanical properties of soil of their construction site were determined and the instrumental data obtained were analyzed. The results of the calculation assessment of seismic resistance of buildings under seismic impacts, the conclusion and recommendations to ensure seismic safety and to reduce damage under strong earthquakes are given.

**Keywords:** earthquake resistance of buildings; technical inspection; instrumental and calculation researches.

## РАСЧЕТ БАЛОЧНЫХ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПОР С ГРУНТОМ

Мардонов Б.М., Байбулатов Х.А., Бердибаев М.Ж.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: mars.berdibaev@mail.ru

**Аннотация:** Рассмотрены поперечные колебания однопролетных балочных мостов с упругими связями к их опорам, в которых при сейсмических воздействиях свайная часть взаимодействует с окружающим грунтом. Предполагается, что деформация конструкций не выходит за пределы упругости и колебания носят линейный характер. Опоры мостов принимаются погруженными в грунт, взаимодействующий с жестким телом, находящимся под действием нестационарных динамических воздействий. Рассмотрен случай, когда правая и левая опоры имеют равные массы и взаимодействуют с окружающим грунтом одинаково. При этом использовано условие симметрии, где достаточно рассмотреть уравнение правой половины балки. Задачи решены аналитическим методом Фурье в приведенных граничных условиях. Полученные результаты приведены в виде распределения перемещения и напряжения по времени и длине мостовых сооружений. Приведен их анализ.

**Ключевые слова:** мост; балка; колебания; сейсмическая нагрузка; напряжение; сейсмическая волна.

### 1. Введение

В настоящее время в связи с ростом населения и развитием городов строительство автомобильных дорог в городах значительно увеличилось. Мосты являются важной частью дорожных сетей и играют важную роль в снижении транспортной нагрузки, поддержании работы автомобильных мостов в случае бедствия, такого как землетрясение. Мосты, а также другие конструкции в сейсмических регионах должны обладать способностью противостоять силам землетрясений в любом направлении.

По своему географическому положению и по степени транспортной доступности Центральная Азия является самым сложным регионом в мире. Ни одна из стран региона не имеет прямого доступа к морским портам. До морских портов во всех направлениях Узбекистан должен пройти территорию двух государств. По результатам инвентаризации автомобильных дорог страны, на начало 2019 г. насчитывается 14331 мостовое сооружение. Из них 7628 (53.2%) расположены на дорогах общего пользования, а 6703 (46.8%) – на городских и сельских дорогах, а также внутрихозяйственных дорогах [1].

Размыв, вызванный наводнением, – распространенное явление, которое приводит к потере боковой опоры у фундаментов мостов. Однако влияние такого же фактора обычно игнорируется при оценке ожидаемой реакции мостов на землетрясения. Мосты являются жизненно важными сооружениями, и их повреждение во время землетрясения может привести к значительным экономическим потерям и затруднить усилия по оказанию помощи после землетрясения [2–3].

Мосты повсеместно присутствуют в современной застроенной среде, они проводят автомагистрали через города и страны и служат транспортным средством жизни современного общества. Мост – это конструкция, позволяющая преодолевать препятствия. Требуемый переход может быть для дороги, железной дороги, пешеходов, канала или трубопровода. Он приносит разнообразные выгоды людям и, в особенности, способствует развитию межрегиональной торговли, сокращает заторы на дорогах и обеспечивает экстренный транзит. Помимо быстрого движения грузов и пассажиров автомобильным и железнодорожным транспортом, это также способствовало передаче электроэнергии и природного газа и интеграции телекоммуникационных линий. Любое повреждение моста приводит к остановке транспортной системы и разрушительному ущербу для экономики. Необходимо обеспечить жизнеспособность транспортных сетей и гарантировать безопасность пользователей транспортной инфраструктуры. Таким образом, важность мостовых

конструкций нельзя недооценивать, и мосты должны быть спроектированы так, чтобы адекватно противостоять силе катастрофических событий [3–5].

Большинство густонаселенных регионов мира подвержены многочисленным стихийным бедствиям, таким как землетрясения, цунами, тропические штормы, смерчи и наводнения. В таких регионах возрастают множественные потенциальные опасности, которые могут вызвать повреждение и разрушение построенных объектов. Для достижения надлежащих характеристик конструкций и уменьшения разрушительного воздействия природных опасностей требуется анализ всех опасностей. Результаты анализа показывают, что боковая несущая способность мостов существенно зависит от увеличения глубины сползания (размыва), что делает их более уязвимыми для будущих землетрясений. Результаты этого исследования напрямую способствуют разработке концепции множественных опасностей для проектирования и оценки автомобильных мостов, основанных на этих характеристиках [6–8].

Мосты с опорами, заложенными в воде, могут быть подвержены размывной эрозии – эффекту, изменяющему динамические свойства моста. В сейсмических регионах мосты подвержены землетрясениям, которые могут повредить конструкции. Эти две опасности, хотя и независимы друг от друга, могут изменить то, как каждая из них влияет на мост в том смысле, что землетрясение может оказать более серьезное воздействие на мост с размывными опорами, чем на неразрушенную конструкцию. Величина и расположение размывного участка, воздействующего на конструкцию, может в разной степени изменить реакцию сейсмического воздействия на мост [7–9].

Сейсмическое поведение этого типа дорожных конструкций необходимо тщательно изучить и проанализировать. Из-за нехватки места на городских магистралях инженеры-проектировщики автомобильных дорог часто склонны использовать неправильные геометрические схемы и, следовательно, многоярусные мосты на автомагистралях часто встречаются в городских транспортных системах. В косых автомобильных мостах, в отличие от прямых автомобильных мостов, из-за ограничений дороги или проблем владения землей направление оснований моста не перпендикулярно продольной оси проезжей части. Поскольку опоры имеют перекося, геометрическая форма проезжей части на этих мостах обычно имеет форму параллелограмма.

Природа сейсмических волн состоит в том, что колебания грунта имеют одно основное направление, и в направлении, перпендикулярном ему, колебания обычно менее интенсивны. Статистически эти колебания независимы. В качестве таковых проектировщики обычно принимают направление оси дороги и направление, перпендикулярное ей, как два критических направления. Для прямых мостов эти направления совпадают с передаваемой модой колебаний 1, но для косых мостов это обычно не так [8, 10, 11].

При сильных землетрясениях в мостовых конструкциях очень вероятно возникновение смещений, обрушений и повреждений несущих элементов. Волны землетрясений с повышенной вероятностью 63.2%, 10% и 2% за 100 лет, а также землетрясение в Нортридже и землетрясение в Кобе были использованы для анализа сейсмической реакции при землетрясениях. Результаты анализа показывают, что повреждение моста при смещении и обрушении можно эффективно контролировать с помощью антисейсмических мер. Когда пиковое ускорение землетрясения велико и способность ограничивающего устройства к чрезмерному смещению конструкции недостаточна, устройство предотвращения опрокидывания может эффективно восполнить недостаток антисейсмического устройства для ограничения чрезмерного смещения моста [12–13].

Сейсмическая уязвимость автодорожных мостов с неразрезными балками проанализирована с целью создания теоретической основы для изучения многоступенчатого укрепления и сейсмического проектирования таких мостов. На основе концепции сейсмического проектирования определены пять уровней характеристик конструкций, а коэффи-

циент пластичности опор смещения принимается в качестве количественного показателя эффективности для расчета предельных значений повреждений мостов в различных предельных состояниях. На основе теории надежности проводится анализ аппроксимации логарифмической регрессией для получения кривой сейсмической уязвимости. Теоретическая кривая уязвимости показывает, что мост имеет хорошие комплексные сейсмические характеристики [13 – 15].

Сейсмические нагрузки являются нагрузками инерционными и возникают при колебаниях, вызванных землетрясениями. В районе землетрясения каждая точка земли испытывает последовательно воздействие волн разного вида, поэтому колебания грунта при землетрясениях носят сложный пространственный характер. Из-за этого сейсмические силы могут иметь любое направление в пространстве и к тому же быть переменными по направлению, скорости и значению.

Наиболее опасны горизонтальные силы, вызывающие изгиб, опрокидывание и сдвиг сооружения. Эти силы в большинстве случаев являются основной причиной повреждения мостов. Вертикальные силы инерции незначительны по сравнению с основными вертикальными нагрузками и являются менее опасными, так как отражаются, в основном, на значениях сжимающих напряжений, изменяя их в течение короткого отрезка времени на 20 – 30%, что не может привести к разрушению материала. Поэтому сейсмостойкость мостовых сооружений обычно проверяется только на воздействие горизонтальных сейсмических сил. Но если вертикальные сейсмические силы могут вызвать растяжение и разрыв элементов конструкции (например, анкерных болтов), учет их обязателен. Кроме того, такие силы уменьшают запасы устойчивости опор и фундаментов на сдвиг и опрокидывание.

Сейсмические колебания сооружений носят очень сложный пространственный характер. При интенсивном сейсмическом воздействии, приводящем к повреждениям, деформации сооружения выходят за пределы упругости и колебания, как правило, не линейны. Однако в целях упрощения задачи нормированная методика определения сейсмических сил базируется на линейной теории и допускает независимое рассмотрение трех взаимно перпендикулярных (вертикальной и горизонтальных) компонентов колебаний.

Следует учитывать также сейсмическое (гидродинамическое) давление воды на промежуточные опоры, сейсмическое горизонтальное давление грунта на устои и возможности значительного снижения несущей способности некоторых грунтов вследствие нарушения их структурной прочности (особенно водонасыщенных рыхлых песков, текучих и текуче-пластичных глинистых грунтов) [16 – 17].

Целью данной статьи является изучение поперечных колебаний однопролетного балочного моста, свайная часть которого, при сейсмическом воздействии, взаимодействует с окружающим грунтом. Академиком Т. Рашидовым была разработана динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений, в основу которой положен учет различия деформаций сооружения и грунта. Рядом ученых в нашей стране и за рубежом рассмотрены проблемы сейсмостойкости подземных и наземных сооружений, взаимодействующих с окружающим грунтом [18 – 19].

Напряженно-деформированное состояние моста при сейсмическом воздействии следует рассчитывать, исходя из амплитудных и спектральных характеристик колебаний грунта, которые в общем случае полагают равными соответствующим характеристикам колебаний среднего по сейсмическим свойствам грунта в районе строительства, с поправками на особенности сейсмического режима в створе мостового перехода, на инженерно-геологические и топографические условия площадок сооружения опор, а также с поправкой на направление колебаний. Сейсмические нагрузки следует учитывать в виде сил инерции от масс моста и находящихся на нем автомобилей, а также в виде сейсмического давления грунта и воды на мостовые опоры [4].

На основе данных ранее выполненных исследований можно выделить две группы повреждений балочных мостов: 1) повреждение пролетных строений, их сдвиг по подфурменным площадкам или падение с опор при относительно небольших повреждениях последних; 2) разрушение или сильное повреждение опор, влекущее за собой полное или частичное обрушение моста.



Рис. 1. Разрушение путепровода при землетрясении в Чили



Рис. 2. Разрушение транспортной эстакады при землетрясении в Кобе (Япония)

Надземные шоссе и мосты – очень важные элементы инфраструктуры в современном обществе. Характеристики систем автомобильных мостов, наблюдавшиеся во время прошлых землетрясений, включая землетрясение в Кобе (Япония) в 1995 г., землетрясение в Лома-Приета (Калифорния, США) в 1989 г., землетрясение в Чили в 2010 г., продемонстрировали, что мосты очень чувствительны к повреждениям во время землетрясений и приводят к большим экономическим потерям (рис. 1–3). Однако из-за их важности потери функциональности после сейсмического события не являются приемлемым критерием эффективности для подавляющего большинства этих структур. С этой целью текущие исследования были сосредоточены на проведении анализа сейсмических характеристик на основе надежности изгибов эстакад и мостов, что требует тщательного рассмотрения оценки и проверки характеристик в зависимости от различных уровней расчетного землетрясения и их важности [14, 20].



Рис. 3. Разрушенные столбы опор и обрушение виадука на Сайпресс-стрит (землетрясение в Лома-Приета)

Мосты играют очень важную роль в эвакуации и аварийных маршрутах для спасателей, первой помощи, медицинских услуг, пожаротушения и транспортировки предметов первой необходимости. Ввиду важности автодорожных мостов в транспортной сети, ключевым моментом является минимизация потери функций моста во время землетрясений. Следовательно, важно оценить прочность и характеристики мостов. Поперечная прочность опор определяется изгибом и сопротивлением сдвигу. Прочность на изгиб получают из результатов анализа технического состояния, в то время как прочность на сдвиг оценивается с помощью определенных уравнений. Пропускная способность, необходимая для текущего и будущего возможного увеличения интенсивности движения, анализируется для оценки безопасности изгиба. В результате анализа было обнаружено, что исследуе-

мый изгиб приведет к повреждениям, если сейсмическая сила превышает действующие нормы [9, 10, 15].

При землетрясениях опоры и пролетные строения мостов динамически взаимодействуют друг с другом и их совокупность реагирует на движения основания как единая колебательная система. Поэтому основной задачей теории сейсмических колебаний мостовых сооружений является исследование совместных колебаний пролетных строений и опор, вызванных колебаниями основания. В настоящее время эта задача не имеет полного решения. Более всего поддаются аналитическому исследованию сейсмических колебаний балочные и рамные мосты.

## 2. Постановка задачи

На основе вышеуказанного при исследовании сейсмических колебаний балочных мостов в первом приближении можно ограничиться рассмотрением только поперечных деформаций пролетных строений и опор. Это тем более приемлемо, что именно поперечные деформации играют решающую роль в формировании горизонтальных сейсмических сил. Рассмотрим однопролетный железобетонный автодорожный мост (рис.4, рис. 5).

Для оценки надежности и несущей способности автодорожных балочных мостов на столбчатых опорах следует, кроме действующих на балку подвижных нагрузок, учитывать усилия, передающиеся через опоры балок, связанные с действием, например, сейсмических волн. Рассмотрим схему автодорожной балочной балки с двумя крайними опорами (см. рис.5).

Пространственные несущие конструкции моста, состоящие из плоских элементов в пределах пролета при динамических воздействиях (землетрясение, движение транспортных средств и т.п.), все элементы конструкций взаимодействуют, т.е. работают совместно. Для этого разработана уточненная расчетная схема, которая является простой в понимании и отражает основные конструктивные особенности конструкций моста. Расчетная схема моста моделирует работу и взаимодействие опоры с грунтом основания по мере вовлечения их в колебательный процесс при воздействии сейсмических нагрузок. Решение плоской схемы конструкций считается весьма упрощенным видом чем пространственная схема. При расчете плоской схемы рамы конструкций моста все исходные параметры подготовлены на основе расчета из проекта в пространственном виде. Поэтому при решении плоской схемы пространственная работа всех конструкций моста учтена.



Рис. 4. Железобетонный автодорожный балочный мост

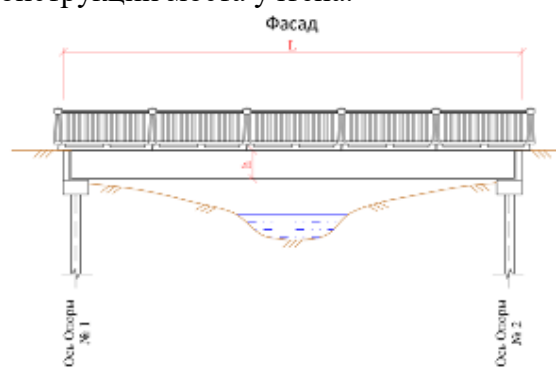


Рис.5. Схема однопролетного балочного автодорожного моста

В первом приближении опоры мостов принимаем погруженными в грунт и взаимодействующими с жестким телом, находящимся под действием нестационарных динамических воздействий. Установим начало координат в точке  $A$ , направим ось  $Ox$  вдоль нейтральной оси балки, а оси  $Oy_1$  (с началом в точке  $O_1$ ) – перпендикулярно к ней (рис.6). Пусть опоры обтекаются продольной волной, за фронтом которой перемещение частиц грунта зависит от координаты  $y_1$  и времени  $t$  по закону  $u_0 = u_0(t - y_1/c_0)$  ( $c_0$  – скорость распространения продольной волны в грунтовой среде). Наличие опор в граничных сече-

ниях балки приводит к возникновению сосредоточенных сил, которые можно учитывать через разрывы третьей производной в уравнении движения. Нами в работе [21] рассмотрена задача поперечного колебания балки с жестким закреплением на опоры моста. В отличие от этой работы здесь решается задача поперечного колебания балки с упругими связями к опорам моста. В указанных предположениях прогиб балки  $y=y(x,t)$  удовлетворяет уравнению

$$m_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EJ_z \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + k_1[y_1(-L,t) - u_1(t)]\delta(L+x) + k_2[y(L,t) - u_2(t)]\delta(L-x) = 0, \quad (1)$$

где  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  – перемещения опоры, удовлетворяющие уравнения движения:

$$M_1 \ddot{u}_1 = -EF \frac{\partial^3 y(-L,t)}{\partial x^3} + k_{01}(u_0 - u_1) + k_{11}(u_c - u_1),$$

$$M_2 \ddot{u}_2 = EF \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} + k_{02}(u_0 - u_2) + k_{12}(u_c - u_2),$$

$$u_c = \frac{1}{H} \int_0^{c_0 t} u_0(t - y_1/c_0) dy_1 \quad \text{при } t < H/c_0,$$

$$u_c = \frac{1}{H} \int_0^H u_0(t - y_1/c_0) dy_1 \quad \text{при } t > H/c_0; H - \text{высота опор.}$$

Рассмотрим случай  $k_1=k_2=k$ ,  $k_{01}=k_{02}=k_{00}$ ,  $k_{11}=k_{12}=k_{00}$ ,  $M_1=M_2=M$ ,  $u_1=u_2=u(t)$ . С учетом симметричности прогибов балки уравнение (1) для участка  $0 < \xi < 1$  ( $\xi=x/L$ ) записываем в виде

$$m_0 \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2} + \frac{EJ_z}{L^4} \frac{\partial^4 y(\xi,t)}{\partial \xi^4} + ky(0,t)\delta(1-\xi) = ku\delta(1-\xi). \quad (2)$$

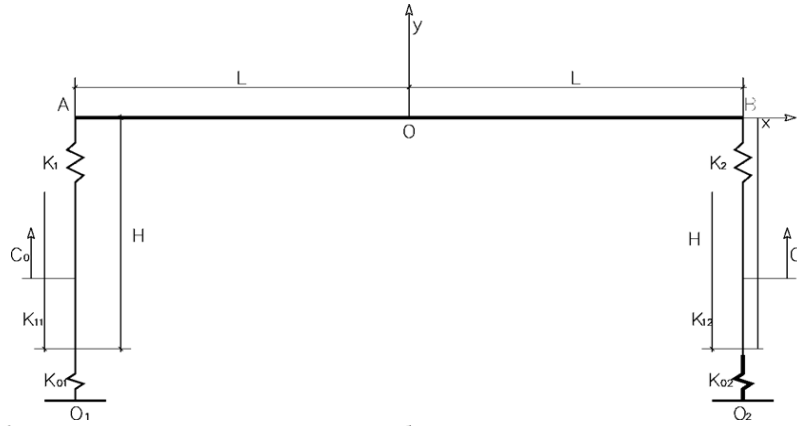


Рис.6. Расчетная схема автодорожного балочного моста с подвижными опорами

Граничные условия с учетом разрыва третьей производной по переменной  $\xi$  в точке  $\xi=1$  и учетом симметричности прогибов балки в точке  $\xi=0$  записываются в виде

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 1, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3} = 0 \quad \text{при } \xi = 1+0, \quad (4)$$

### 3. Метод решения

Решение уравнения (10) при граничных условиях (7) – (9) можно получить методом Фурье, следуя которому, решение однородного уравнения, соответствующего (9), представим в виде

$$\bar{y} = \varphi(\xi)T(t),$$

где положим  $\ddot{T} = -\omega^2 T(t)$ . Функция  $\varphi(\xi)$  удовлетворяет уравнению

$$\varphi^{IV} - \lambda^4 \varphi + \beta \varphi_0 \delta(1 - \xi) = 0, \quad (5)$$

где  $\lambda = L^4 \sqrt{\frac{m_b \omega^2}{EJ_z}}$ ,  $\beta = \frac{kL^3}{EJ_z}$ ,  $\varphi_0 = \varphi(1)$ .

Решение уравнения (5) с учетом разрыва третьей производной (4) представим через функции Крылова ( $C_i$  – произвольные постоянные):

$$\varphi = \frac{\beta \varphi_0}{EJ\lambda^3} \{C_1 Y_1(\lambda \xi) + C_2 Y_2(\lambda \xi) + C_3 Y_3(\lambda \xi) + C_4 Y_4(\lambda \xi) + Y_4[\lambda(1 - \xi)]H(1 - \xi)\} \text{ при } 0 < \xi < 1, \quad (6)$$

$$\varphi = \frac{\beta \varphi_0}{EJ\lambda^3} [C_1 Y_1(\lambda \xi) + C_2 Y_2(\lambda \xi) + C_3 Y_3(\lambda \xi) + C_4 Y_4(\lambda \xi)] \text{ при } \xi > 1, \quad (7)$$

где  $H(z)$  – единичная функция Хевисайда;  $Y_i(z)$  – функции Крылова, равные

$$Y_1(z) = (chz + \cos z)/2, \quad Y_2(z) = (shz + \sin z)/2, \quad Y_3(z) = (chz - \cos z)/2, \quad Y_4(z) = (shz - \sin z)/2.$$

Пользуясь решением (6) из условий (3), получим

$$C_2 = Y_3(\lambda), \quad C_4 = Y_1(\lambda).$$

Аналогично из решения (6) при выполнении условий (3) следует

$$C_1 Y_4(\lambda) + C_3 Y_2(\lambda) = -2Y_1(\lambda)Y_3(\lambda), \quad C_1 Y_2(\lambda) + C_3 Y_4(\lambda) = -Y_1^2(\lambda) - Y_3^2(\lambda).$$

Из последней системы находим постоянные  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{Y(\lambda)Y_2(\lambda) + 2Y_3(\lambda)Y_1(\lambda)}{Y_2(\lambda) - Y_4(\lambda)}, \quad C_2 = -C_1 - Y(\lambda), \quad Y = -\frac{[Y_1(\lambda) + Y_3(\lambda)]^2}{Y_2(\lambda) + Y_4(\lambda)}. \quad (8)$$

Подставляя постоянные  $C_i$  в формулу (6) и полагая  $\varphi(1) = \varphi_0$ , составим уравнения для определения собственных чисел  $\lambda = \lambda_n$ :

$$\lambda^3 \Delta(\lambda) - \beta [C_0(\lambda)Y_1(\lambda) + Y_2(\lambda)Y_3(\lambda)\Delta(\lambda) + C_3(\lambda)Y_3(\lambda)\Delta(\lambda)] = 0,$$

где  $C_0 = Y(\lambda)Y_2(\lambda) + 2Y_3(\lambda)Y_1(\lambda)$ ,  $\Delta = Y_2(\lambda) - Y_4(\lambda)$ .

Функции  $\varphi_n(\xi)$  удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^1 \varphi_n(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi = 0, \quad n \neq j. \quad (9)$$

Решение уравнения (2) представим в виде суммы

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi) T_n(t). \quad (10)$$

Подставив выражение (9) в уравнение (2), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_b (\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n) \varphi_n(\xi) = -ku_1(t) \delta(1 - \xi).$$

Пользуясь условием ортогональности (18), составим уравнение относительно коэффициентов разложения  $T_n(t)$ :

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = -\frac{kuL}{\|\varphi_n\| m_b}, \quad (11)$$

где  $\|\varphi_n\| = \int_0^1 \varphi_n^2 d\xi$ ;  $u = u(t)$  – перемещение опоры, удовлетворяющее уравнению

$$M\ddot{u} = EF \frac{\partial^3 y(L, t)}{\partial x^3} + k_{00}(u_0 - u).$$

Используя формулы (10) при конечном числе суммирования, получим

$$M\ddot{u} = \frac{EJ}{L^3} \sum_{i=1}^N T_n(t) \varphi_i'''(1) + k_{00}(u_0 - u). \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) при конечном числе  $N$  совместно образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка для определения функций  $T_i(t)$  ( $i=1 \dots N$ ) и перемещения опоры  $u(t)$ .

#### 4. Результаты и анализ

На рис. 7 представлены кривые зависимости перемещения опоры  $u(t)$  (см. рис. 7,а) и прогибов балки прямоугольного сечения  $b \times h$  в торцах  $y(L, t)$  (см. рис. 7,б) и  $y(0, t)$  (см. рис. 7,в) от времени  $t$  при действии волны  $u_0 = A_0 \sin(\frac{c_0 t - y_1}{L_v})$  ( $L_v$  – длина волны) для двух

значений длины  $L_v$ . В расчетах принято  $L=25$  м,  $H=8$  м,  $b=0.3$  м,  $h=0.5$  м,  $A_0=0.003$  м,  $c_0=1000$  м/с,  $m=90$  кг/м,  $M=2000$  кг,  $k=10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $k_{00}=10^6$  Н/м,  $E=5 \cdot 10^{10}$  Па.

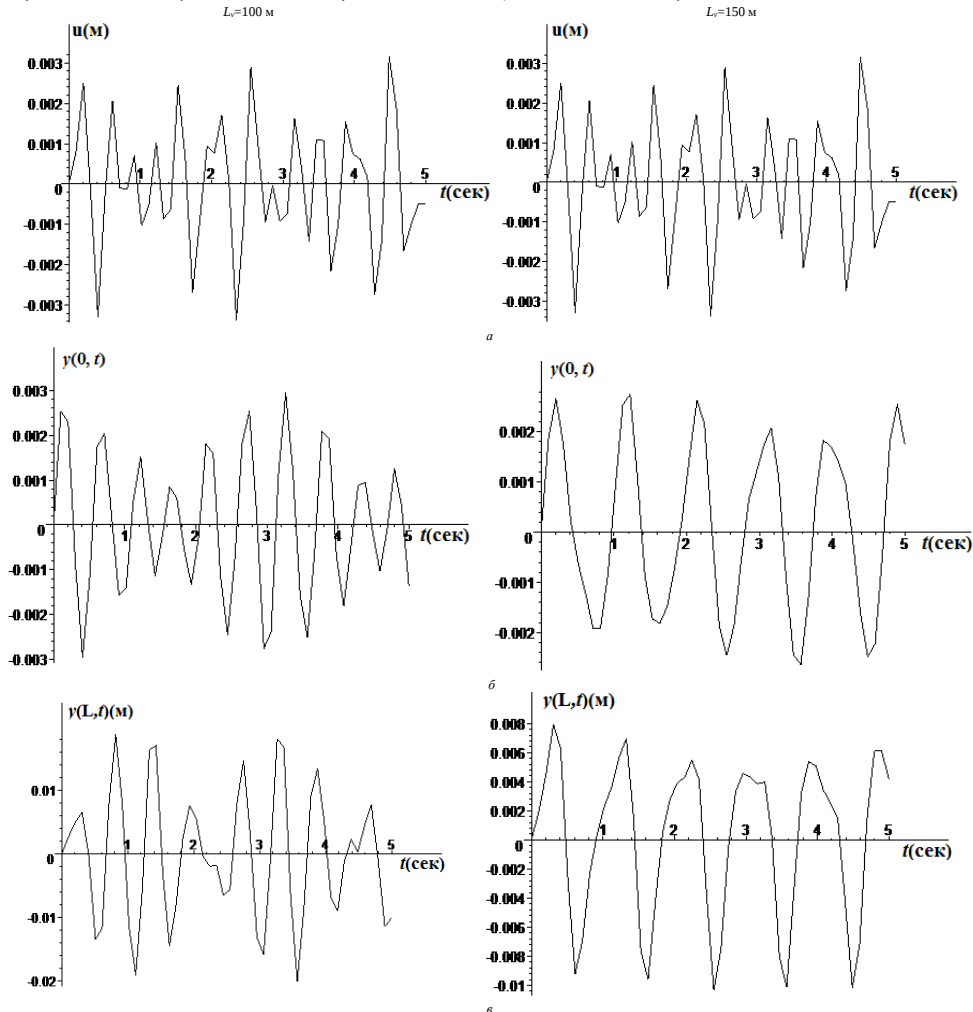


Рис. 7. Зависимости перемещения опоры  $u(t)$  (а), прогибов  $y(0, t)$  (б) и  $y(L, t)$  (в) от времени  $t$  (с) для двух значений длины волны  $L_v$  (м)

Из анализа кривых, представленных на рис.7, следует, что движения перемещения опоры прогиба торцевого и срединного сечений балки носят колебательный характер. Длина падающей волны практически не влияет на колебания опоры, увеличение длины волны может изменить частотный состав колебаний сечений балки и уменьшить их прогибы.

На рис. 8 приведены изменения напряжения  $\sigma = M_u h / 2J$  ( $M_u = EJ \partial^2 y / \partial y^2$  – изгибающий момент) в сечениях  $x=0$  и  $x=L$ .

Анализ графиков на рис. 8 показывает, что действие гармонической волны на балку через опоры с упругими элементами приводит к колебательному закону изменения прогибов и напряжений в ее сечениях. При этом наибольшие значения напряжений выявляются в сопряженных сечениях балки с опорами с упругими элементами, а с удалением от них их значения существенно уменьшаются. Здесь видно, что наличие упругого элемента в сечении  $x=L$  балки приводит к изменению характера изменения напряжения по времени и снижает ее амплитуду.

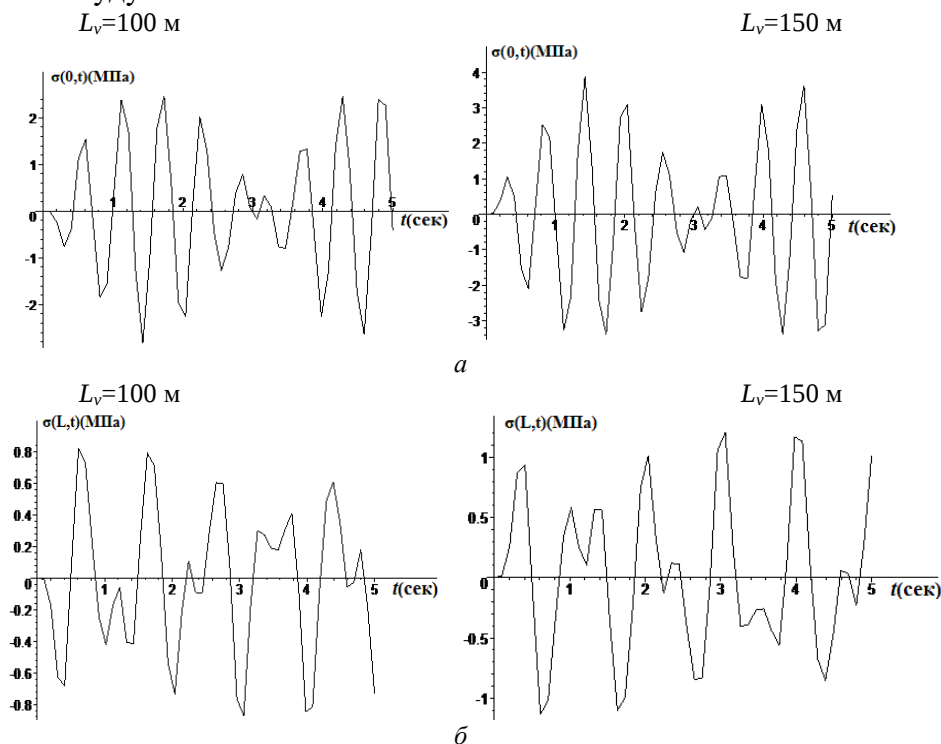


Рис. 8. Зависимости осевых напряжений  $\sigma(0,t)$  (а) и  $\sigma(L,t)$  (б) от времени  $t$ (с) для двух значений длины волны  $L_v$ (м)

В работе [21] приведены графики, когда опоры мостов с жесткими закреплениями, и даны следующие выводы: длинные волны, кроме изменения состава частот колебательного процесса, приводят к значительному росту максимальных значений напряжений вблизи сечения закрепления балки к опорам. Здесь из рис. 8 видно, что вблизи торцов балки напряжения почти в десять раз меньше, чем с опоры мостов с жесткими закреплениями, которые приведены в работе [21].

## 5. Заключение

Рассмотрены только поперечные деформации пролетных строений и опор однопролетного железобетонного автодорожного моста, свайная часть которого, при сейсмическом воздействии, взаимодействует с окружающим грунтом. Разработана уточненная расчетная схема, которая является простой в понимании и отражает основные конструктивные особенности конструкций моста. Расчетная схема моста моделирует работу и взаимодействие опоры с грунтом основания по мере вовлечения их в колебательный процесс при воздействии сейсмических нагрузок.

Анализ результатов показывает, что наличие упругого элемента существенно влияет на частотный состав колебаний сечений балки, при действии коротких волн в нем обнаруживаются колебания с высокой частотой. Упругая связь между торцом балки и опорой, в основном, влияет на прогибы балки в местах контакта ее с опорой и приводит к незначительному росту амплитуды колебаний срединного сечения балки.

Установлено, что наличие упругого элемента в сечении  $x=L$  балки приводит к изменению характера зависимости напряжения по времени и снижает ее амплитуду при действии короткой волны.

При наличии упругого элемента между опорой и балкой рост длины продольной волны, действующей на опоры, практически не влияет на амплитуду прогибов балки, она приводит к изменению частотного состава колебательного процесса, а также к уменьшению амплитуды напряжений от изгибающих моментов вблизи сечений балки, сопряжённых с опорами.

При установке упругого элемента выявлено уменьшение до незначительного количества деформаций в местах сопряжения мостов с опорами, приводящих к более качественным показателям эксплуатационных свойств мостов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Rashidov T., Baybulatov K., Bekmirzayev D., Takhirov S., Gayibov J., Nishonov N.* Comprehensive Program on Structural Assessment of Bridges in Uzbekistan. Vol. 3542. 2020 (Sendai, Japan: The 17th World Conference on Earthquake Engineering). P.3с–0013.
- [2] *Zhenghua Wang, Leonardo Dueñas-Osorio, Jamie E. Padgett.* Influence of scour effects on the seismic response of reinforced concrete bridges. *Engineering Structures*. Vol. 76. 1 October 2014. P. 202–214.
- [3] *Chao Li, Hong Hao, Hongnan Li, Kaiming Bi.* Seismic Fragility Analysis of Reinforced Concrete Bridges with Chloride Induced Corrosion Subjected to Spatially Varying Ground Motion // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. Vol.16. 2016. №05. 1550010.
- [4] ОДН 218.1.021-2003. Проектирование автодорожных мостов в сейсмических районах.
- [5] *Muntasir Billah A.H.M., Shahria Alam M., Rahman Bhuiyan M.A.* “Fragility Analysis of Retrofitted Multicolumn Bridge Bent // Subjected to Near-Fault and Far-Field Ground Motion”. *Journal of Bridge Engineering*, ASCE, October, 2013.
- [6] *Fioklou A., Alipour A.* Seismic Behavior of Bridges with Deep Foundations under Effects of Scouring. *Structures Congress April 3–5. 2014. Boston, Massachusetts, United States, 2014.*
- [7] *Anžlin Andrej, Luke J. Prendergast.* Influence of local scour at multiple piers on the vibration characteristics of a bridge under seismic excitation // *IABSE Symposium 2019 Guimarães Towards a Resilient Built Environment - Risk and Asset Management March 27-29. 2019. Guimarães, Portugal, 2019.*
- [8] *Bayat M., Daneshjoo F., Nisticò N.* The effect of different intensity measures and earthquake directions on the seismic assessment of skewed highway bridges. *Earthquake engineering and engineering vibration* January, 2017. Vol.16, №1. P. 165–179.
- [9] *Nielson B.* Personal Communication: Analytical Fragility Curves for Highway Bridges in Moderate Seismic Zones, 2005.
- [10] *Priestley M.J.N., Seible F., Macrae G.* The Kobe Earthquake of January 17, 1995: Initial Impressions from a Quick Reconnaissance, *Structural Systems Research Project, Report SSRP-95/03, University of California, Sam Diego, February, 1995. – 71 p.*
- [11] *DesRoches R., Leon R.T., Choi E., Pfeifer T.* Seismic Retrofit of Bridges in Mid-America, // *16th US-Japan Bridge Engineering Workshop, 2000.*
- [12] *Yu-min Zhang, Guanq-yuan Wenq, Yun Shi, Jian-bo Dai.* Seismic Effect Research of Seismic Measures for Beam Bridge under Different Earthquakes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. №649, 012031.
- [13] *Peizhi Wang.* Research on Seismic Vulnerability of Continuous Beam Bridges Based on Incremental Dynamic Analysis Method. *January 2020. E3S Web of Conferences 198 S1 2020. P. 02026*
- [14] *Vamvatsikos D., Cornell C.A.* Incremental Dynamic Analysis // *Earthquake Engineering and Dynamics*. Vol. 31. 2002. No.3. P. 491–514.
- [15] *Nielson B.* Analytical Fragility Curves for Highway Bridges in Moderate Seismic Zones. PhD. Thesis, Georgia Institute of Technology, 2005.
- [16] *Карцивадзе Г.Н.* Сейсмостойкость дорожных искусственных сооружений. М.: Транспорт, 1974. – 264 с.
- [17] *Шестоперов Г.С.* Сейсмостойкость мостов. М.: Транспорт, 1984. – 143 с.
- [18] *Рашидов Т.Р.* Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
- [19] *Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х.* Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Фан, 1985. – 152с.
- [20] *Hafizul Alim.* Reliability based seismic performance analysis of retrofitted concrete bridge bent // *Thesis April, 2014. DOI: 10.13140/2.1.1462.9924.*
- [21] *Berdibaev Mars, Mardonov Batir, Khurramov Asror.* Vibrations of a Girder on Rigid Supports of Finite Mass Interacting With Soil under Seismic Loads // *E3S Web of Conferences 2021. №264. P.02038.*

Дата поступления  
07.06.2021

**Мардонов Б.М., Байбулатов Х.А., Бердибаев М.Ж. Таянчларнинг грунт билан ўзаро таъсирини ҳисобга олган ҳолда сейсмик юклар таъсиридаги тўсинли автоўл кўприкларини ҳисоблаш.**

**Аннотация:** Қозик қисми атрофидаги грунт билан ўзаро таъсирдаги таянч билан эластик боғланган бир оралиқли тўсинли кўприкларнинг сейсмик таъсирлардаги кўндаланг тебраниш ҳаракати кўрилган. Ўрганишдан аниқландики, конструкциялар деформацияси эластиклик чегарасида бўлади ва тебраниш чизиқли ҳарактерга эга. Кўприк таянчи ностационар динамик таъсирдаги грунт билан ўзаротаъсирлашувчи қаттиқ жисм сифатида қабул қилинган. Кўприкнинг чап ва ўнг таянчларининг оғирликлари тенг ва бир хил грунт билан ўзаротаъсирдаги ҳоли кўрилган. Шунинг учун, симметрия шартидан фойдаланилиб тўсиннинг ўнг тарафини кўриб чиқиш етарлидар. Масала келтирилган чегаравий шартларда аналитик Фурье услубини қўллаган ҳолда ечилган. Олинган натижалар кўчиши ва кучланишларнинг вақт ва кўприк иншооти узунлиги бўйича ўзгариши кўринишида келтирилган ҳамда улар таҳлил қилинган.

**Калит сўзлар:** кўприк; тўсин; тебранишлар; сейсмик юк; кучланиш; сейсмик тўлқин.

**Mardonov B.M., Baybulatov H.A., Berdibaev M.J. Calculation of girder road bridges for seismic loads, taking into account the interaction of supports with the ground**

**Abstract:** The transverse vibrations of single-span beam bridges with elastic ties to their supports, in which, under seismic influences, the pile part interacts with the surrounding soil, are considered. It is assumed that the deformation of structures does not go beyond the limits of elasticity and the vibrations are linear. The bridge supports are assumed to be immersed in the soil interacting with a rigid body under the influence of non-stationary dynamic influences. The case is considered when the right and left supports have equal masses and interact with the surrounding soil in the same way. Here the symmetry condition was used, where it is sufficient to consider the equation of the right half of the beam. The problems are solved by the analytical Fourier method under the given boundary conditions. The results obtained are presented in the form of the distribution of displacement and stresses over the time and length of the bridge structures. Their analysis is presented.

**Keywords:** bridge; girder; vibration; seismic load; stress; seismic wave.

УДК 675 (075.8)

## **МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА МНОГОСЛОЙНЫХ МОКРЫХ КОЖЕВЕННЫХ ПОЛУФАБРИКАТОВ**

**Бахадиров Г.А., Цой Г.Н.**

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: tsoygeran@mail.ru*

**Аннотация:** В статье приведены результаты экспериментального исследования многослойной обработки мокрых кожевенных полуфабрикатов в сочетании с водоотводящими материалами. Получены математические зависимости количества удаленной влаги для каждого из восьми слоев мокрого кожевенного полуфабриката от скорости их одновременного пропуска в пакете между вращающимися отжимными валами под их давлением.

**Ключевые слова:** восьмислойный отжим; кожевенный полуфабрикат; водоотводящий материал; опорная плита; вертикальная подача; рабочие валы.

### **1. Введение**

В настоящее время производство натуральной кожи включает ряд таких технологических процессов, как подготовительные (отмока, зольение, пикелевание, мягчение, квашение, обезжиривание), процессы отделки – химические (дубление), жидкостные, физико-химические (наполнение, крашение, удаление влаги, сушка, увлажнение) и механические (мездрение, строгание, разводка, нарезка мереи, мятье, разбивка, тяжка, прокатка, шлифование), покрывного крашения и др.

Изучению влияния технологических и других факторов на физико-механические, фильтрационные и качественные свойства кожевенного полуфабриката посвящена работа [1]. В диссертации [2] рассмотрено развитие методов и совершенствование средств исследования физико-механических свойств волокнисто-пористых материалов. В работе [3] изучены динамические нагрузки валковой пары для интенсификации процессов отжима. В статье [4] выполнен анализ влияния факторов на удельное давление в жале валов модуля. В результате экспериментальных исследований определены графики этих зави-

симостей и получена математическая модель. Современным методам исследования и анализу свойств кож и шкур посвящены работы зарубежных ученых [5–8]. Вопросы совершенствования конструкций валкового оборудования, в том числе изучения взаимодействия валкового модуля с обрабатываемым материалом, изложены в работах [9–11].

С целью повышения эффективности и производительности технологического процесса отжима излишней влаги из мокрых кожевенных полуфабрикатов нами экспериментально исследуется влияние таких факторов, как количество слоев кожевенных полуфабрикатов и влагоотводящих материалов (моншонов) на технологический процесс отжима влаги из мокрых кожевенных полуфабрикатов с их вертикальной подачей на опорной плите.

## 2. Методика исследования

Эксперимент проводился на валковом стенде, где отжимные валы установлены горизонтально, а опорная плита изготовлена из металлического листа толщиной 0.005 м, шириной 0.1 м, длиной 0.3 м (рис. 1). Один слой пакета составляет один кожевенный полуфабрикат и один из влагоотводящих материалов (моншонов) – сукна ЛАЩ и так далее аналогично.

Материалом кожевенного полуфабриката для эксперимента служила бычина среднего развеса двойная, после хромового дубления. Согласно Международному стандарту ИСО 2588-85, выбрано количество кожи по следующей формуле

$$n = 0.2\sqrt{x} \quad (1)$$

где  $x$  – число кож для эксперимента, взяли из партии 2500 шт.  $n=10$  шт. Из этих 10 кож вырезали резакон полосы поперек хребтовой линии размером  $0.05 \times 0.25$  м, пронумеровывали и комплектовали в группы по 5 шт. по схеме, использованной в [12–14]. Предварительно определяли влажность кож-полуфабрикатов по топографическим участкам. Так, в среднем из 10 выбранных кож в чепраке влага составляла 65 %, а в поле – 73%.

Эксперимент проводили следующим образом. На металлическую опорную плиту устанавливали полосу из волокнистого сукна ЛАЩ толщиной 0.004 м, затем кожевенный полуфабрикат и т.д. Затем включали стенд, устанавливали сжатие пружин по тарировке до нужного усилия прижима отжимных валов, скорость регулировали реостатом, а частоту вращения валов тахометром часового типа ТЧ 10Р. Предварительно пропускали контрольные образцы кожи и при этом замеряли сжатие пружин, т.е. отклонение от установочного. Если отклонение превышало 3 %, то затяжкой гаек регулировали пружины. Затем пропускали основные образцы кож. До и после отжима взвешивали на лабораторных весах ВЛТЭ-500, дискретность составляла 0.01 г (ISO-9001).

При обработке результатов эксперимента использовали метод D-оптимального планирования второго порядка с применением матрицы плана К. Канно, так как они обес-

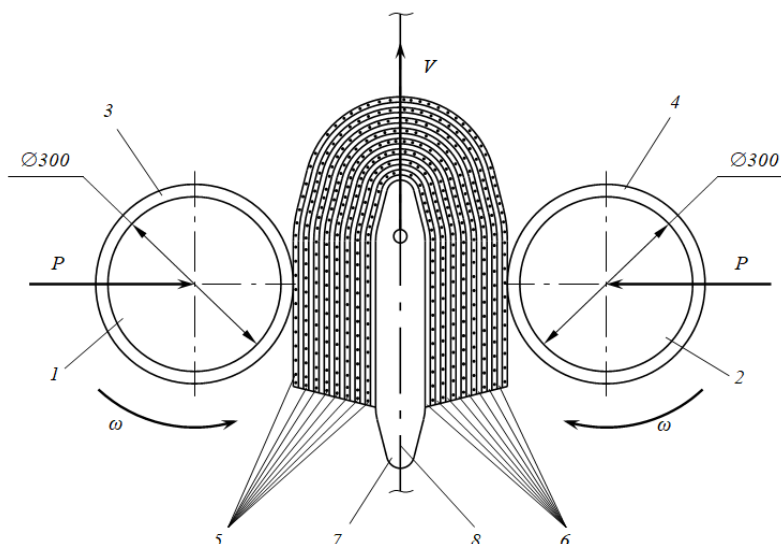


Рис. 1. Схема экспериментального стенда для многослойного отжима мокрых кожевенных полуфабрикатов: 1, 2 – отжимные валы; 3, 4 – влагоотводящие материалы БМ; 5 – кожевенные полуфабрикаты 6 – влагоотводящие материалы ЛАЩ; 7 – опорная плита, 8 – тяговая цепь

печивают наибольшую точность в оценках коэффициентов регрессии. При этом учитывалось, что план К. Кано предусматривает варьирование факторов на трех уровнях: нижнем (–), нулевом (0) и верхнем (+), что целесообразно для данного исследования. На основе априорной информации изучали процесс удаления влаги с учетом трех факторов:  $x_1$  – давление валов  $P$ , кН/м;  $x_2$  – скорость пропуска  $V$ , м/с; количество слоев кож с моншонами 10 штук, диапазон изменения давления прижима от 32 до 96 кН/м; скорость отжимных валов от – 0.17 до 0.34 м/с, а количество повторностей пропуска восьмислойного пакета коженных полуфабрикатов равно 5.

В исследовании был выбран диаметр отжимных валов 0.2 м и с покрытием толщиной 0.01 м из сукна БМ, покрытие металлической опорной плиты в один слой из сукна ЛАЩ (с толщиной 0.004 м, каждая).

Перед проведением эксперимента методами математической статистики было выбрано необходимое количество измерений (число повторностей), которое обеспечивало требуемую точность.

Рабочую матрицу составили по матрице плана К. Кано для двухфакторного эксперимента. Кодирование факторов осуществляли по формуле

$$x_i = \frac{c_i - c_{i0}}{t_0}, \quad (2)$$

где  $x_i$  – кодирование значения факторов;  $c_i$ ,  $c_{i0}$  – натуральные значения фактора на текущем и нулевом уровнях;  $t_0$  – натуральное значение интервала варьирования фактора.

Функции цели аппроксимированы полиномом

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2, \quad (3)$$

где  $y$  – количество удаленной влаги в кодированном виде;  $b_0$ ,  $b_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $b_{ii}$  – коэффициенты регрессии.

Таблица 1

Уровни и интервалы варьирования фактора эксперимента

| Показатель            | Кодированное значение факторов | Натуральные значения факторов |             |
|-----------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------|
|                       |                                | $x_1$ , кН/м                  | $x_2$ , м/с |
| Верхний уровень       | +                              | 96                            | 0.340       |
| Нулевой уровень       | 0                              | 64                            | 0.255       |
| Нижний уровень        | –                              | 32                            | 0.170       |
| Интервал варьирования |                                | 32                            | 0.085       |

После реализации рабочей матрицы получены средние арифметические значения (табл. 2).

Однородность дисперсии проведена с помощью критерия Кохрена при доверительной вероятности  $\alpha=0.95$ . Зная общее число оценок, дисперсии  $N$  и число степеней свободы  $f=k-1$  вычисляем по табл. 2. Далее находим  $G_T=0,358$  при  $N=9$ ,  $f=k-1=5-1=4$ .  $k$  – число параллельных опытов

$$S_{out}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}{n-1}; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (y - \bar{y})^2}{N(n-1)}; \quad (5)$$

$$G_{p1} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2} = \frac{1.35}{5.295} = 0.255; \quad G_{p2} = \frac{1.025}{3.325} = 0.3087; \quad G_{p3} = \frac{0.76}{4.025} = 0.1888; \quad G_{p4} = \frac{0.625}{2.518} = 0.2248;$$

$$G_{p5} = \frac{1.50}{5.35} = 0.2804; \quad G_{p6} = \frac{1.635}{5.3325} = 0.3060; \quad G_{p7} = \frac{1.475}{4.1725} = 0.3540; \quad G_{p8} = \frac{1.015}{4.225} = 0.2370;$$

$$G_{p_{cp}} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2} = \frac{1.5}{5.7274} = 0.2619; \quad G_{p1} = 0.2550 < G_T = 0.358; \quad G_{p2} = 0.3087 < G_T = 0.358;$$

$$G_{p3} = 0.1888 < G_T = 0.358; \quad G_{p4} = 0.2248 < G_T = 0.358; \quad G_{p5} = 0.2804 < G_T = 0.358; \quad G_{p6} = 0.3066 < G_T = 0.358; \\ G_{p7} = 0.3540 < G_T = 0.358; \quad G_{p8} = 0.2367 < G_T = 0.358; \quad G_{p_{cp}} = 0.2619 < G_T = 0.358.$$

Следовательно, результаты исследования воспроизводимы. Определяем коэффициенты регрессии  $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$ .

Для первого слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 15.3943; \quad b_{11} = -0.5340; \quad b_1 = 3.4862; \quad b_{22} = 1.0660; \quad b_2 = -2.6569; \quad b_{12} = 0.2.$$

Для второго слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 15.2946; \quad b_{11} = -0.5340; \quad b_1 = 3.4862; \quad b_{22} = 1.0660; \quad b_2 = -2.6569; \quad b_{12} = 0.2.$$

Для третьего слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 15.2154; \quad b_{11} = -0.5678; \quad b_1 = 3.4862; \quad b_{22} = 1.0322; \quad b_2 = -2.6569; \quad b_{12} = 0.4.$$

Для четвертого слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 15.1683; \quad b_{11} = -0.6524; \quad b_1 = 3.4274; \quad b_{22} = 0.9477; \quad b_2 = -2.7549; \quad b_{12} = 0.1.$$

Для пятого слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 14.8203; \quad b_{11} = -0.6155; \quad b_1 = 3.4274; \quad b_{22} = 1.0845; \quad b_2 = -2.7373; \quad b_{12} = 0.1.$$

Для шестого слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 14.6366; \quad b_{11} = -0.6177; \quad b_1 = 3.4862; \quad b_{22} = 1.0985; \quad b_2 = -2.7961; \quad b_{12} = 0.4.$$

Для седьмого слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 14.4894; \quad b_{11} = -0.5861; \quad b_1 = 3.3588; \quad b_{22} = 1.1139; \quad b_2 = -2.7765; \quad b_{12} = 0.5.$$

Для восьмого слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 14.4; \quad b_{11} = -0.603; \quad b_1 = 3.3784; \quad b_{22} = 1.0970; \quad b_2 = -2.7569; \quad b_{12} = 0.4.$$

Для среднего слоя кожевенного полуфабриката в кодированном виде:

$$b_0 = 14.9366; \quad b_{11} = -0.6016; \quad b_1 = 3.4862; \quad b_{22} = 1.0484; \quad b_2 = -2.7069; \quad b_{12} = 0.2.$$

Получим следующие уравнения регрессии в кодированном виде:

Для первого слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_1 = 15.3943 - 0.5340 \cdot x_1^2 + 1.0659 \cdot x_2^2 + 3.4862 \cdot x_1 - 2.6569 \cdot x_2 - 0.02 \cdot x_1 x_2. \quad (6)$$

Для второго слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_2 = 15.2946 - 0.5340 \cdot x_1^2 + 1.06598 \cdot x_2^2 + 3.4862 \cdot x_1 - 2.6569 \cdot x_2 + 0.2 \cdot x_1 x_2. \quad (7)$$

Для третьего слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_3 = 15.2154 - 0.5678 \cdot x_1^2 + 1.0322 \cdot x_2^2 + 3.4862 \cdot x_1 - 2.6568 \cdot x_2 - 0.4 \cdot x_1 x_2. \quad (8)$$

Для четвертого слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_4 = 15.1683 - 0.6524 \cdot x_1^2 + 0.9477 \cdot x_2^2 + 3.4274 \cdot x_1 - 2.7549 \cdot x_2 - 0.1 \cdot x_1 x_2. \quad (9)$$

Для пятого слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_5 = 14.8203 - 0.6155 \cdot x_1^2 + 1.0845 \cdot x_2^2 + 3.4774 \cdot x_1 - 2.7373 \cdot x_2 + 0.1 \cdot x_1 x_2. \quad (10)$$

Для шестого слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_6 = 14.6366 - 0.6177 \cdot x_1^2 + 1.0985 \cdot x_2^2 + 3.4863 \cdot x_1 - 2.7961 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_1 x_2. \quad (11)$$

Для седьмого слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_7 = 14.4894 - 0.5809 \cdot x_1^2 + 1.1139 \cdot x_2^2 + 3.3588 \cdot x_1 - 2.7765 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_1 x_2. \quad (12)$$

Для восьмого слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_8 = 14.4 - 0.6030 \cdot x_1^2 + 1.0970 \cdot x_2^2 + 3.3784 x_1 - 2.7569 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_1 x_2. \quad (13)$$

Для среднего слоя кожевенного полуфабриката:

$$y_{cp} = 14.9366 - 0.6016 \cdot x_1^2 + 1.0484 \cdot x_2^2 + 3.4862 \cdot x_1 - 2.7069 \cdot x_2 + 0.2 \cdot x_1 x_2. \quad (14)$$

Подставляя вместо  $x_1=(P-64)/32$ , где  $P$  – усилия прижима отжимных валов, и  $x_2=(V-0.255)/0.085$ , где  $V$  – скорость пропуска мокрых кожевенных полуфабрикатов между вращающимися отжимными валами, получили уравнение удаленной влаги из мокрого кожевенного полуфабриката в процентах в зависимости от усилия прижима и скорости пропуска мокрого кожевенного полуфабриката между вращающимися отжимными валами.

Гипотезу об адекватности полученных уравнений проверили с помощью критерия Фишера при доверительной вероятности  $\alpha=0.95$ , использованной в [12–14]:

$$F_p = \frac{S_{ao}^2}{S^2\{y\}} < F_T, \quad (15)$$

где  $S_{ao}^2$  – остаточная дисперсия, или дисперсия адекватности;  $S^2\{y\}$  – дисперсия воспроизводимости.

Из табл. 1 и 2 определим  $S_{ao}^2$  и  $S^2\{y\}$ .

Таблица 2

Матрица планирования эксперимента

| № | $P, x_1$ | $V, x_2$ | № кож. пол. | Результаты измерений в % |       |       |       |       |           | $\sum_1^n (y - \bar{y})^2$ | $S_{er}^2$ | $y_{cal}$ | $\bar{y} - y_{cal}$ | $(\bar{y} - y_{cal})^2$ |
|---|----------|----------|-------------|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|----------------------------|------------|-----------|---------------------|-------------------------|
|   |          |          |             | $y_1$                    | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $\bar{y}$ |                            |            |           |                     |                         |
| 1 | 2        | 3        | 4           | 5                        | 6     | 7     | 8     | 9     | 10        | 11                         | 12         | 13        | 14                  | 15                      |
| 1 | 0        | 0        | 1           | 15.8                     | 15.6  | 15.2  | 15.0  | 14.9  | 15.3      | 0.6                        | 0.15       | 15.3      | 0                   | 0                       |
|   |          |          | 2           | 15.6                     | 15.4  | 15.2  | 15.0  | 14.8  | 15.2      | 0.4                        | 0.1        | 15.2      | 0                   | 0                       |
|   |          |          | 3           | 15.8                     | 15.2  | 15.0  | 14.8  | 14.2  | 15.0      | 1.36                       | 0.34       | 15.22     | 0.3                 | 0.09                    |
|   |          |          | 4           | 15.2                     | 15.1  | 15.0  | 14.7  | 14.5  | 14.9      | 0.34                       | 0.085      | 14.89     | 0.01                | 0.0001                  |
|   |          |          | 5           | 15.1                     | 14.9  | 14.7  | 14.5  | 14.3  | 14.7      | 0.4                        | 0.1        | 14.68     | 0.1                 | 0.01                    |
|   |          |          | 6           | 15.3                     | 15.0  | 14.8  | 14.5  | 14.2  | 14.7      | 0.75                       | 0.1875     | 14.64     | 0.06                | 0.0036                  |
|   |          |          | 7           | 15.5                     | 14.3  | 14.6  | 14.1  | 14.0  | 14.5      | 1.46                       | 0.36       | 14.49     | 0.01                | 0.0001                  |
|   |          |          | 8           | 15.0                     | 14.9  | 14.3  | 14.0  | 13.8  | 14.4      | 1.14                       | 0.285      | 14.4      | 0                   | 0                       |
|   |          |          | ср          | 15.6                     | 15.3  | 15.0  | 14.7  | 14.3  | 15.0      | 1.03                       | 0.2575     | 14.86     | 0.14                | 0.0196                  |
| 2 | +        | +        | 1           | 17.1                     | 17.3  | 17.0  | 16.0  | 15.8  | 16.7      | 1.74                       | 0.435      | 16.96     | 0.26                | 0.0676                  |
|   |          |          | 2           | 17.0                     | 16.8  | 16.8  | 16.3  | 16.1  | 16.6      | 0.46                       | 0.115      | 16.86     | 0.26                | 0.0676                  |
|   |          |          | 3           | 17.0                     | 16.6  | 16.7  | 16.0  | 15.7  | 16.4      | 1.14                       | 0.285      | 16.91     | 0.51                | 0.2601                  |
|   |          |          | 4           | 16.5                     | 16.4  | 16.3  | 16.0  | 15.8  | 16.2      | 0.32                       | 0.08       | 16.24     | 0.04                | 0.0016                  |
|   |          |          | 5           | 16.3                     | 16.2  | 16.0  | 15.6  | 15.6  | 15.9      | 0.60                       | 0.15       | 16.32     | 0.42                | 0.1764                  |
|   |          |          | 6           | 16.2                     | 16.0  | 15.8  | 15.6  | 15.4  | 15.8      | 0.40                       | 0.10       | 15.41     | 0.39                | 0.1521                  |
|   |          |          | 7           | 16.4                     | 15.9  | 15.7  | 15.5  | 15.0  | 15.7      | 1.06                       | 0.265      | 16.10     | 0.4                 | 0.16                    |
|   |          |          | 8           | 16.4                     | 15.4  | 15.5  | 15.2  | 15.1  | 15.6      | 1.86                       | 3.15       | 15.92     | 0.32                | 0.1024                  |
|   |          |          | ср          | 16.6                     | 16.3  | 16.2  | 15.8  | 15.5  | 16.1      | 0.55                       | 0.1375     | 16.34     | 0.24                | 0.0576                  |
| 3 | –        | +        | 1           | 10.4                     | 10.2  | 10.0  | 9.6   | 8.8   | 9.8       | 1.40                       | 0.35       | 9.58      | 0.22                | 0.0484                  |
|   |          |          | 2           | 10.2                     | 10.0  | 9.6   | 9.4   | 9.3   | 9.7       | 0.60                       | 0.15       | 9.49      | 0.21                | 0.0441                  |
|   |          |          | 3           | 10.1                     | 9.9   | 9.4   | 9.3   | 8.8   | 9.5       | 1.06                       | 0.265      | 9.14      | 0.36                | 0.1296                  |
|   |          |          | 4           | 9.7                      | 9.5   | 9.2   | 9.1   | 9.0   | 9.3       | 0.34                       | 0.085      | 9.18      | 0.12                | 0.0144                  |
|   |          |          | 5           | 9.5                      | 9.2   | 8.9   | 8.8   | 8.6   | 9.0       | 0.55                       | 0.1375     | 9.02      | 0.02                | 0.0004                  |
|   |          |          | 6           | 9.4                      | 9.3   | 8.7   | 8.6   | 8.5   | 8.9       | 0.70                       | 0.175      | 8.43      | 0.47                | 0.2209                  |
|   |          |          | 7           | 9.6                      | 9.0   | 8.8   | 8.6   | 8.0   | 8.8       | 1.36                       | 0.34       | 8.48      | 0.32                | 0.1024                  |
|   |          |          | 8           | 9.2                      | 8.8   | 8.8   | 8.2   | 8.0   | 8.6       | 0.96                       | 0.24       | 8.36      | 0.24                | 0.0576                  |
|   |          |          | ср          | 9.76                     | 9.48  | 9.18  | 8.95  | 9.28  | 9.2       | 0.46                       | 0.115      | 8.96      | 0.76                | 0.5776                  |
| 4 | –        | –        | 1           | 15.8                     | 15.6  | 15.2  | 15.0  | 14.9  | 15.3      | 0.6                        | 0.15       | 15.3      | 0                   | 0                       |
|   |          |          | 2           | 15.6                     | 15.4  | 15.2  | 15.0  | 14.8  | 15.2      | 0.4                        | 0.1        | 15.2      | 0                   | 0                       |
|   |          |          | 3           | 15.8                     | 15.2  | 15.0  | 14.8  | 14.2  | 15.0      | 1.36                       | 0.34       | 15.25     | 0.25                | 0.0625                  |
|   |          |          | 4           | 15.2                     | 15.1  | 15.0  | 14.7  | 14.5  | 14.3      | 0.34                       | 0.085      | 14.89     | 0.01                | 0.0001                  |
|   |          |          | 5           | 15.1                     | 14.9  | 14.7  | 14.5  | 14.3  | 14.7      | 0.4                        | 0.1        | 14.69     | 0.01                | 0.0001                  |
|   |          |          | 6           | 15.0                     | 14.8  | 14.6  | 14.4  | 14.2  | 14.6      | 0.4                        | 0.1        | 14.83     | 0.23                | 0.0529                  |
|   |          |          | 7           | 15.0                     | 14.6  | 14.3  | 14.1  | 14.0  | 14.4      | 0.66                       | 0.165      | 14.79     | 0.35                | 0.1225                  |
|   |          |          | 8           | 15.2                     | 14.5  | 14.0  | 14.0  | 13.8  | 14.3      | 1.28                       | 0.32       | 14.67     | 0.37                | 0.1369                  |
|   |          |          | ср          | 15.3                     | 15.0  | 14.8  | 14.6  | 14.3  | 14.8      | 0.58                       | 0.145      | 14.94     | 0.14                | 0.0196                  |

Продолжение табл.2

| Продолжение табл. 1 |   |   |    |      |      |      |      |      |      |            |         |       |      |           |
|---------------------|---|---|----|------|------|------|------|------|------|------------|---------|-------|------|-----------|
| 1                   | 2 | 3 | 4  | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11         | 12      | 13    | 14   | 15        |
| 5                   | + | - | 1  | 22.8 | 22.4 | 21.7 | 21.6 | 21.5 | 22.0 | 1.3        | 0.325   | 21.67 | 0.33 | 0.1089    |
|                     |   |   | 2  | 22.7 | 22.2 | 21.7 | 21.5 | 21.4 | 21.9 | 1.18       | 0.295   | 21.72 | 0.18 | 0.0324    |
|                     |   |   | 3  | 22.6 | 22.0 | 21.4 | 21.3 | 21.2 | 21.7 | 1.40       | 0.35    | 21.42 | 0.28 | 0.0784    |
|                     |   |   | 4  | 22.5 | 21.8 | 21.4 | 21.2 | 21.1 | 21.6 | 1.66       | 0.415   | 21.54 | 0.06 | 0.0036    |
|                     |   |   | 5  | 22.4 | 21.6 | 21.2 | 21.0 | 20.8 | 21.4 | 1.60       | 0.40    | 21.35 | 0.05 | 0.0025    |
|                     |   |   | 6  | 22.2 | 21.4 | 21.3 | 20.9 | 20.7 | 21.3 | 1.14       | 0.285   | 21.0  | 0.3  | 0.09      |
|                     |   |   | 7  | 22.0 | 21.2 | 20.9 | 20.8 | 20.6 | 21.1 | 1.20       | 0.30    | 20.75 | 0.35 | 0.1225    |
|                     |   |   | 8  | 22.0 | 21.2 | 20.8 | 20.7 | 20.3 | 21.0 | 1.06       | 0.265   | 20.63 | 0.37 | 0.1369    |
|                     |   |   | ср | 22.4 | 21.7 | 21.3 | 21.0 | 21.0 | 21.5 | 1.39       | 0.3475  | 21.26 | 0.1  | 0.01      |
| 6                   | + | 0 | 1  | 19.4 | 18.8 | 18.6 | 18.2 | 18.0 | 18.6 | 1.20       | 0.30    | 18.35 | 0.27 | 0.0729    |
|                     |   |   | 2  | 19.2 | 18.6 | 18.4 | 18.3 | 18.0 | 18.5 | 0.80       | 0.20    | 18.25 | 9.36 | 0.1296    |
|                     |   |   | 3  | 19.4 | 18.5 | 18.4 | 18.3 | 17.9 | 18.4 | 2.02       | 0.505   | 18.13 | 0.27 | 0.0729    |
|                     |   |   | 4  | 18.8 | 18.3 | 18.2 | 18.2 | 18.0 | 18.3 | 0.36       | 0.09    | 17.94 | 0.36 | 0.1296    |
|                     |   |   | 5  | 18.6 | 18.1 | 18.0 | 17.8 | 17.0 | 17.9 | 1.36       | 0.34    | 17.63 | 0.27 | 0.0729    |
|                     |   |   | 6  | 18.4 | 17.9 | 17.8 | 17.6 | 17.3 | 17.8 | 0.66       | 0.165   | 17.51 | 0.29 | 0.0841    |
|                     |   |   | 7  | 18.4 | 17.9 | 17.7 | 17.5 | 17.0 | 17.7 | 1.06       | 0.265   | 17.28 | 0.42 | 0.1764    |
|                     |   |   | 8  | 18.2 | 17.8 | 17.8 | 17.2 | 17.0 | 17.6 | 0.96       | 0.24    | 17.18 | 0.32 | 0.1024    |
|                     |   |   | ср | 18.8 | 18.2 | 18.0 | 17.9 | 17.5 | 18.1 | 0.91       | 0.2275  | 17.8  | 0.3  | 0.09      |
| 7                   | 0 | + | 1  | 14.8 | 14.6 | 11.9 | 14.2 | 14.0 | 13.9 | 5.4        | 1.35    | 13.8  | 0.1  | 0.01      |
|                     |   |   | 2  | 14.7 | 14.4 | 12.1 | 14.0 | 13.8 | 13.8 | 4.10       | 1.025   | 13.7  | 0.1  | 0.01      |
|                     |   |   | 3  | 14.6 | 14.2 | 12.3 | 13.8 | 13.6 | 13.7 | 3.04       | 0.76    | 13.59 | 0.11 | 0.0121    |
|                     |   |   | 4  | 14.5 | 12.4 | 13.6 | 13.6 | 13.5 | 13.6 | 2.42       | 0.605   | 13.36 | 0.24 | 0.0576    |
|                     |   |   | 5  | 14.3 | 13.8 | 11.5 | 13.5 | 13.4 | 13.3 | 4.54       | 1.135   | 13.17 | 0.13 | 0.0169    |
|                     |   |   | 6  | 14.2 | 13.7 | 10.9 | 13.4 | 13.3 | 13.1 | 6.54       | 1.635   | 12.94 | 0.16 | 0.0256    |
|                     |   |   | 7  | 14.0 | 13.6 | 10.9 | 13.3 | 13.2 | 13.0 | 5.90       | 1.475   | 12.84 | 0.16 | 0.0256    |
|                     |   |   | 8  | 13.8 | 13.5 | 11.5 | 12.2 | 13.0 | 12.8 | 3.58       | 0.895   | 12.74 | 0.06 | 0.0036    |
|                     |   |   | ср | 1.44 | 14.0 | 13.1 | 13.5 | 13.5 | 13.7 | 1.02       | 0.225   | 13.26 | 0.44 | 0.1936    |
| 8                   | - | 0 | 1  | 11.9 | 11.7 | 9.0  | 11.3 | 11.1 | 11.0 | 5.40       | 1.35    | 11.37 | 0.26 | 0.0676    |
|                     |   |   | 2  | 11.7 | 11.5 | 10.2 | 11.1 | 10.0 | 10.9 | 2.34       | 0.595   | 11.27 | 0.37 | 0.1369    |
|                     |   |   | 3  | 11.6 | 11.3 | 9.3  | 10.9 | 10.9 | 10.8 | 2.56       | 0.64    | 11.16 | 0.36 | 0.1296    |
|                     |   |   | 4  | 11.5 | 11.1 | 9.4  | 10.7 | 10.8 | 10.7 | 2.50       | 0.625   | 11.09 | 0.39 | 0.1521    |
|                     |   |   | 5  | 11.3 | 10.9 | 8.2  | 10.5 | 10.6 | 10.3 | 5.90       | 1.475   | 10.78 | 0.48 | 0.2304    |
|                     |   |   | 6  | 11.2 | 10.8 | 8.2  | 10.4 | 10.4 | 10.2 | 5.44       | 1.36    | 10.53 | 0.13 | 0.0169    |
|                     |   |   | 7  | 11.0 | 10.8 | 8.2  | 10.3 | 10.2 | 10.1 | 4.99       | 1.2475  | 10.52 | 0.42 | 0.1764    |
|                     |   |   | 8  | 10.8 | 10.7 | 8.3  | 10.2 | 10.0 | 10.0 | 4.06       | 1.015   | 10.42 | 0.42 | 0.1764    |
|                     |   |   | ср | 11.4 | 11.1 | 8.9  | 10.7 | 10.5 | 10.5 | 3.77       | 0.9425  | 10.89 | 0.39 | 0.1521    |
| 9                   | 0 | - | 1  | 19.8 | 19.6 | 17.4 | 19.2 | 19.0 | 19.0 | 3.6        | 0.90    | 19.1  | 0.1  | 0.01      |
|                     |   |   | 2  | 19.7 | 19.4 | 17.5 | 19.0 | 18.9 | 18.9 | 2.86       | 0.715   | 19.02 | 0.12 | 0.0144    |
|                     |   |   | 3  | 19.6 | 19.2 | 17.6 | 18.8 | 18.8 | 18.8 | 2.24       | 0.56    | 19.02 | 0.18 | 0.0324    |
|                     |   |   | 4  | 19.5 | 19.0 | 17.7 | 18.6 | 18.7 | 18.7 | 1.74       | 0.435   | 18.87 | 0.17 | 0.0289    |
|                     |   |   | 5  | 19.4 | 18.8 | 16.2 | 18.5 | 18.6 | 18.3 | 6.00       | 1.500   | 18.64 | 0.34 | 0.1156    |
|                     |   |   | 6  | 19.2 | 18.7 | 16.2 | 18.6 | 18.5 | 18.2 | 5.30       | 13.25   | 18.53 | 0.33 | 0.1089    |
|                     |   |   | 7  | 19.0 | 18.6 | 16.4 | 18.3 | 18.2 | 18.1 | 4.00       | 1.00    | 18.36 | 0.26 | 0.0676    |
|                     |   |   | 8  | 18.8 | 18.6 | 16.4 | 18.2 | 18.0 | 18.0 | 3.6        | 0.90    | 18.25 | 0.25 | 0.0625    |
|                     |   |   | ср | 19.4 | 16.9 | 18.6 | 18.6 | 18.6 | 18.4 | 3.37       | 0.8425  | 18.7  | 0.3  | 0.09      |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 1. Σ 21.18 | Σ 5.295 |       |      | Σ 0.385   |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 2. Σ 13.23 | Σ 3.32  |       |      | Σ 0.378   |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 3. Σ 16.16 | Σ 4.025 |       |      | Σ 20.7216 |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 4. Σ 10.07 | Σ 2.518 |       |      | Σ 0.3888  |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 5. Σ 21.4  | Σ 3.35  |       |      | Σ 20.6476 |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 6. Σ 21.33 | Σ 5.333 |       |      | Σ 0.755   |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 7. Σ 20.69 | Σ 4.172 |       |      | Σ 0.9535  |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | 8. Σ 16.69 | Σ 4.225 |       |      | Σ 0.7787  |
|                     |   |   |    |      |      |      |      |      |      | Σ 17.6125  | Σ 5.727 |       |      | Σ 0.6260  |

Для первого слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad1}^2 = \frac{\sum_1^N n \cdot (\bar{y} - y_{pi})^2}{N - \frac{(k+2)(k+1)}{2}} = \frac{5 \cdot 0.385}{3} = 0.6417; \quad (16)$$

$$S_1^2\{y\} = \frac{\sum_1^N \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}{N(n-1)} = \frac{21.18}{9(5-1)} = 0.5883; \quad (17)$$

$$F_{p1} = \frac{0.6417}{0.5933} = 1.0908; F_{p1} = 1.0908 < F_T = 2.87.$$

где  $N$  – общее число опытов;  $k$  – число факторов;  $n$  – число повторений в опыте;  $y_i$  – результат отдельного наблюдения;  $\bar{y}$  – средние арифметические значения результата опыта;  $y_{pi}$  – расчетные значения критерия по уравнению регрессии.

Для первого слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad1}^2 = \frac{5 \cdot 0.385}{3} = 0.6417; S_1^2\{y\} = \frac{21.18}{9(5-1)} = 0.5883; F_{p1} = 1.0908 < F_T = 2.87.$$

Для второго слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad2}^2 = \frac{5 \cdot 0.4202}{3} = 0.7003; S_2^2\{y\} = \frac{86.75}{9(5-1)} = 2.41; F_{p2} = 1.7140 < F_T = 2.87.$$

Для третьего слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad3}^2 = \frac{5 \cdot 3.0296}{3} = 5.0493; S_3^2\{y\} = \frac{78.07}{9(5-1)} = 2.1686; F_{p3} = 2.7045 < F_T = 2.87.$$

Для четвертого слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad4}^2 = \frac{5 \cdot 5.5189}{3} = 9.1982; S_4^2\{y\} = \frac{131.16}{9(5-1)} = 3.6433; F_{p4} = 2.3168 < F_T = 2.87.$$

Для пятого слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad5}^2 = \frac{5 \cdot 0.3072}{3} = 0.512; S_5^2\{y\} = \frac{86.24}{9(5-1)} = 2.3955; F_{p5} = 1.8116 < F_T = 2.87.$$

Для шестого слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad6}^2 = \frac{5 \cdot 0.3072}{3} = 0.512; S_6^2\{y\} = \frac{86.24}{9(5-1)} = 2.3955; F_{p6} = 2.1237 < F_T = 2.87.$$

Для седьмого слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad7}^2 = \frac{5 \cdot 0.3072}{3} = 0.512; S_7^2\{y\} = \frac{86.24}{9(5-1)} = 2.3955; F_{p7} = 2.7653 < F_T = 2.87.$$

Для восьмого слоя кожевенного полуфабриката:

$$S_{ad8}^2 = 1.2978; S_8^2\{y\} = \frac{86.24}{9(5-1)} = 2.3955; F_{p8} = 0.7648 < F_T = 2.87.$$

Для среднего слоя из восьми кожевенного полуфабриката:

$$S_{adcp}^2 = 0.1044; S_{cp}^2\{y\} = \frac{17.6125}{9(5-1)} = 0.4892; F_{pcp} = 2.1340 < F_T = 2.87.$$

### 3. Результаты исследования

Итак, уравнения регрессии можно считать пригодным и с 95%-ной доверительной вероятностью, которые в именованном виде после раскодировки имеют вид:

Для первого слоя кожевенного полуфабриката:

$$\Delta W_1 = 24.9859 - 0.521543 \cdot 10^{-3} P^2 + 147.5377 V^2 + 0.1570 P - 111.2076 V + 0.0735 PV. \quad (18)$$

Для второго слоя кожевенного полуфабриката:

$$\Delta W_2 = 24.9503 - 0.5215 \cdot 10^{-3} P^2 + 147.5405 V^2 + 0.1570 P - 111.2089 V + 0.0735 PV. \quad (19)$$

Для третьего слоя кожевенного полуфабриката:

$$\Delta W_3 = 25.3194 - 0.5545 \cdot 10^{-3} P^2 + 142.8623 V^2 + 0.1424 P - 113.539 V - 0.1471 P V. \quad (20)$$

Для четвертого слоя кожевенного полуфабриката:

$$\Delta W_4 = 23.0977 - 0.6371 \cdot 10^{-3} P^2 + 131.1623 V^2 + 0.1793 P - 101.6652 V - 0.0368 P V. \quad (21)$$

Для пятого слоя кожевенного полуфабриката:

$$\Delta W_5 = 24.07756 - 0.0601 \cdot 10^{-3} P^2 + 150.1024 V^2 + 0.17747 P - 111.108 V + 0.03676 P V. \quad (22)$$

Для шестого слоя кожевенного полуфабриката:

$$\Delta W_6 = 26.3649 - 0.0632 \cdot 10^{-3} P^2 + 152.036 V^2 + 0.1487 P - 121.7854 V + 0.1471 P V. \quad (23)$$

Для седьмого слоя кожевенного полуфабриката:

$$\Delta W_7 = 26.7815 - 0.5723 \cdot 10^{-3} P^2 + 154.1744 V^2 + 0.1314 P - 123.058 V + 0.1838 P V. \quad (24)$$

Для восьмого слоевого полуфабриката:

$$\Delta W_8 = 25.775 - 0.5889 \cdot 10^{-3} P^2 + 151.8367 V^2 + 0.1435 P - 119.2842 V + 0.14371 P V. \quad (25)$$

Для среднего слоя из восьми кожевенных полуфабрикатов:

$$\Delta W_{\text{ср}} = 24.3141 - 0.5875 \cdot 10^{-3} P^2 + 145.1087 V^2 + 0.1654 P - 110.5569 V + 0.0735 P V. \quad (26)$$

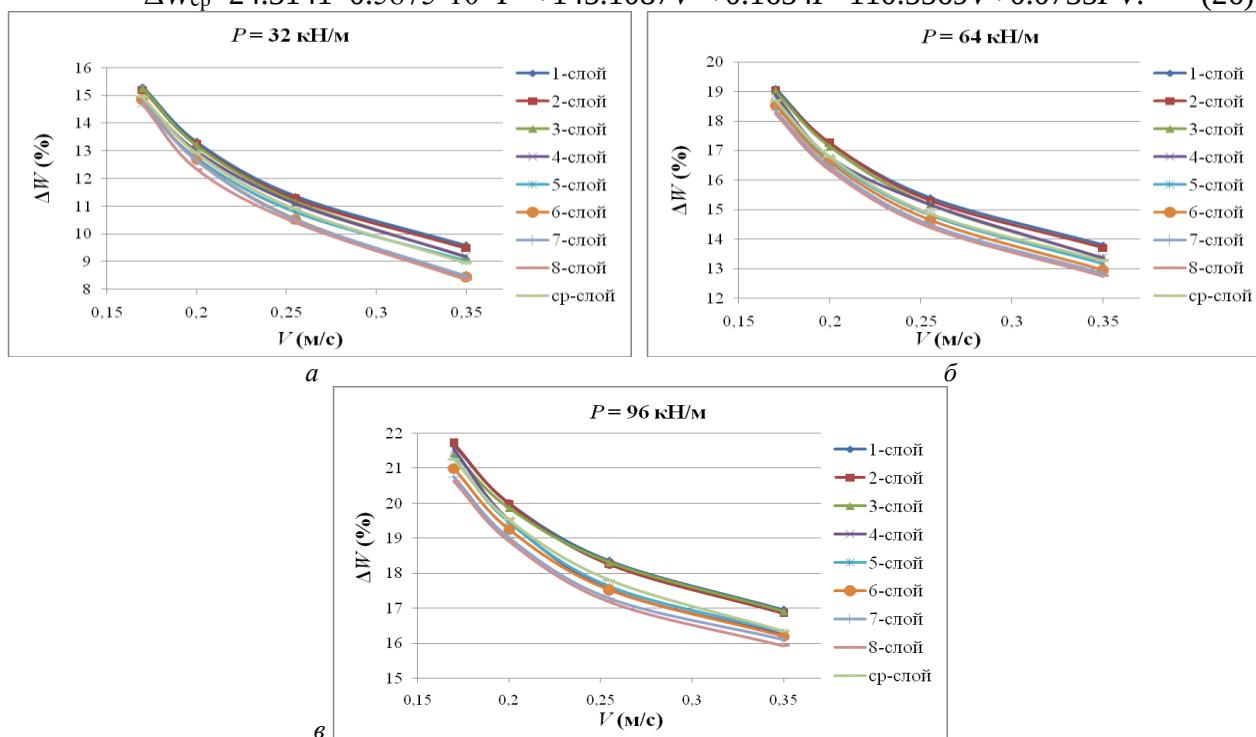


Рис. 2. Зависимость количества удаленной влаги  $\Delta W$  от скорости пропуска  $V$  каждого из пяти слоев кожевенных полуфабрикатов при усилии прижима отжимных валов:  $P=32$  кН/м (а),  $P=64$  кН/м (б),  $P=96$  кН/м (в); 1–первый слой; 2–второй слой; 3–третий слой; 4–четвертый слой; 5–пятый слой; 6–шестой слой; 7–седьмой слой; 8–восьмой слой; 9–средний слой кожевенных полуфабрикатов

Получены математические модели зависимости количества удаленной влаги из кожевенных полуфабрикатов от давления прижима отжимных валов и скорости пропуска для каждого из восьми слоев кожевенного полуфабриката (18–26) при их одновременном отжиге избыточной влаги на валковом стенде. Получены графики зависимости отжима влаги из кожевенного полуфабриката от давления прижима отжимных валов и скорости пропуска (рис. 2, а, б, в).

#### 4. Заключение

По результатам эксперимента (см. рис. 2, а, б, в) и математической обработки получены математические модели удаления влаги из мокрых кожевенных полуфабрикатов по каждому слою и среднее из пяти слоев в зависимости от усилия прижима валов и скорости их пропуска.

Для исследуемого образца кожевенного полуфабриката бычины среднего развеса после процесса дубления для кож верха обуви максимальная влажность в полах достигает

73 %, а в чепраке – до 65 %. А остаточная влажность в кожевенном полуфабрикate после отжима должна быть 55–60 % в зависимости от типа и назначения кож.

В случае данного экспериментального исследования остаточная влажность должна быть в порядке 60 %. Следовательно, нам необходимо было удалить 13 % влаги при отжиме на валковом стенде.

Результаты экспериментов показали, что можно одновременно отжимать влагу из восьми слоев кожевенного полуфабриката при давлении отжимных валов 32 кН/м со скоростью их подачи до 0.25 м/с. При этом производительность технологического процесса составила более восьми раз, а при давлении отжимных валов до 64 кН/м и скорости подачи восьми слоев кожевенного полуфабриката до 0.34 м/с производительность технологического процесса будет составлять свыше десяти раз. При давлении прижима 96 кН/м кожевенных полуфабрикатов производительность технологического процесса составляет более 16 раз по сравнению с производительностью аналогичных валковых машин.

Анализ графиков удаления избыточной влаги из многослойного отжима образцов кожевенных полуфабрикатов на валковой паре показывает, что перекрещиваются линии графиков различных слоев, которые являются следствием неравномерности размеров по толщине, по плотности и даже в пределах одной и в разных топографических участках.

Результаты экспериментального исследования будут использованы при разработке и проектировании экспериментальной отжимной машины для многослойной механической обработки листовых материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Amanov A.T., Bahadirov G.A., Amanov T.Yu., Tsoy G.N., Nabiev A.M.* Determination of Strain Properties of the Leather Semi-Finished Product and Moisture-Removing Materials of Compression Rolls. Materials 2019. (Basel). <https://doi.org/10.3390/ma12213620>.
- [2] *Соколовский А.Р.* Развитие методов и совершенствование средств исследования физико-механических свойств волокнисто-пористых материалов легкой промышленности: Дис. ... докт. техн. наук. – М. 2010. – 287 с.
- [3] *Еришов С.В.* Динамическое нагружение валковой пары для интенсификации процесса отжима: Дис. ... канд. техн. наук. Иваново, 2013. – 130 с.
- [4] *Крылов А.В., Фомин Ю.Г., Тувин А.А., Шахова И.Ю.* Исследование влияния факторов на удельное давление в валковых модулях. Ивановский государственный политехнический университет // Журнал «Технология текстильной промышленности» 2020. № 6. – С. 147-149.
- [5] *Mehta M., Naffa R., Maidment C., et al.* Raman and atr-ftir spectroscopy towards classification of wet blue bovine leather using ratiometric and chemometric analysis // Journal of Leather Science and Engineering. 2020. Vol. 2-3. – P.1–15.
- [6] *Fan Q., Ma J., Xu Q.* Insights into functional polymer-based organic-inorganic nanocomposites as leather finishes. Journal of Leather Science and Engineering. 2019. Vol.1–3. <https://doi.org/10.1186/s42825-019-0005-9>.
- [7] *Paiva R. M., Marques E. A., da Silva L. F., et al.* Importance of the surface treatment in the peeling strength of joints for the shoes industry. Applied Adhesion Science 2013, №1: 5. <https://doi.org/10.1186/2196-4351-1-5>.
- [8] *Kagunyu A.W., Matiri F., Ngari E.* Camel hides: Production, marketing and utilization in pastoral regions of northern Kenya. Pastoralism: Research, Policy and Practice 2013, №3: 25. <https://doi.org/10.1186/2041-7136-3-25>
- [9] *Bakhadirov G., Khusanov K.* Construction of automatic lines connecting several mechanical operations in processing leather semi-finished product. International Journal of Psychosocial Rehabilitation, Vol. 24. 2020. Issue 04. – P. 2079-2090. DOI: 10.37200/IJPR/V24I4/PR201318.
- [10] *Mavlonov T., Akhmedov A., Saidakhmedov R., Bakhadirov K.* Simulation modelling of cold rolled metal strip by asymmetric technology IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2020. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/883/1/012194>
- [11] *Kurpe O., Kukhar V.V.* Development and optimization of flat products manufacturing at rolling mill 3200. Materials Science Forum 2019. Vol. 946. –P. 794-799. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.946.794.
- [12] *Головтеева А.А., Куциди Д.А., Санкин Л.Б.* Лабораторный практикум по химии и технологии кожи и меха. М.: Легкая и пищевая промышленность. 1982. – 309 с.
- [13] *Тихомиров В.А.* Планирование и анализ эксперимента. М.: Легкая индустрия. 1974. – 283 с.
- [14] *Farooqa M. A., Nóvoab H., Araújo A., Tavares S. M.* O. An innovative approach for planning and execution of pre-experimental runs for Design of Experiments. European Research on Management and Business Economics. Vol. 22. 2016. Issue 3, September–December, – P. 155-161.

Дата поступления  
04.06.2021

**Баҳадиров Г.А., Цой Г.Н. Кўп қатламли намланган кўн ярим маҳсулотга механик ишлов бериш**

**Аннотация:** Мақолада кўп қатламли намланган кўн ярим маҳсулотларига улар орасига сув тортувчи материаллар жойлаштирилган ҳолда механик ишлов беришнинг экспериментал тадқиқотининг натижалари келтирилган. Саккиз қатламли кўн ярим маҳсулотларининг ҳар бири учун улардан сиқиб чиқарилган суюқлик миқдорининг узатиш тезлигига ва сиқувчи валлар босимида математик боғлиқликлари келтириб чиқарилган.

**Калим сўзлар:** саккиз қатламли сиқиш; кўн ярим маҳсулот; намликни шимувчи материал; таянч плита; вертикал узатма; ишчи валлар.

**Bahadirov G.A., G.N. Tsoy. Mechanical processing of multi-layer wet leather semi-finished products**

**Abstract:** The article presents the results of an experimental study of multilayer processing of wet leather semi-finished products in combination with moisture-removing materials. Mathematical dependences of the amount of removed moisture for each of the eight layers of wet leather semi-finished product on the rate of their simultaneous passage in the package between the rotating squeezing rollers under their pressure were obtained.

**Keywords:** eight-layer squeezing; semi-finished leather product; moisture-removing material; base plate; vertical feed.

УДК 621.01.677.21

## РАСЧЕТ ВЕРХНЕГО БРУСА ПИЛЬНОГО ДЖИНА НА ИЗГИБ

Мухаммадиев Д.М.<sup>1</sup>, Ахмедов Х.А.<sup>1</sup>, Эргашев И.О.<sup>1</sup>, Жамолова Л.Ю.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Ташкентский государственный аграрный университет, Ташкент, Узбекистан

E-mail: davlat\_mm@mail.ru

**Аннотация:** Установлено, что с созданием новой конструкции многоразового колосника возникла необходимость расчета верхнего бруса пильного джина на изгиб из-за увеличения размера отверстий для крепления колосников. При расчете верхнего бруса пильного джина с переменной толщиной на изгиб использован метод конечных элементов в форме перемещений. В результате произведенных исследований рекомендована новая конструкция лобового бруса с моментом инерции  $I=3.314 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  для крепления многоразового колосника, обеспечивающая минимальный (до 0.4 мм) изгиб при максимальной нагрузке 3004.43 Н/м.

**Ключевые слова:** пильный джиг; верхний брус; метод конечных элементов; изгиб; прогиб.

### 1. Введение

На основе создания новой конструкции многоразового колосника установлена, необходимость расчета верхнего бруса пильного джина на изгиб, так как увеличен размер отверстий для крепления колосников, что приводит к снижению его момента инерции и прогиба верхнего бруса. Увеличение прогиба верхнего бруса влияет на технологический размер между колосниками, способствуя касанию и трению между колосниками и пильными дисками [1]. Установлено, что чем больше трение между колосниками и пильными дисками, тем выше их износ и расход электроэнергии. Поэтому нами была поставлена задача определить прогиб верхнего бруса пильного джина.

В исследовании Г.И.Мирошниченко [2] определены прогиб и угол поворота пильного вала с использованием метода эквивалентных диаметров, разработанного Б.Н.Жемочкиным [3]. В результате, зная диаметры участков пильного вала, их осевые моменты и коэффициенты приведения, величины поперечных сил, изгибающих моментов и их разности в местах перехода сечений, мы определили прогибы вала для существующей конструкции пильного цилиндра.

В статье Н.Н.Доманова [4] произведен расчет различных физических свойств элементов для определенных строительных конструкций. Общепринятые способы определения сопротивления материалов позволяют осуществить эти вычисления в конкретных прикладных задачах. Основываясь на исследованиях, проводимых в теоретических областях, а также разработках новых методов расчетов, можно утверждать о рациональности использования возможностей математического аппарата. Так, при расчете изгиба балок в строительных конструкциях, в частности, используется теория рядов Фурье.

В работе Э.А.Кочетова и И.Л.Саля [5] для решения задачи по теме «Изгиб балок» предложено использовать прикладные программы MathCAD, Solid Works, T-Flex,

Microsoft Excel и др. В статье Р.В.Мищенко и Д.А.Пименова [6] исследовано влияние неоднородности свойств материала балки переменной толщины на ее напряженно-деформированное состояние. Авторами рассматривались задачи изгиба балки переменной толщины из нелинейно-деформируемого материала под действием поперечной нагрузки с различными вариантами неоднородности по ее толщине: слои неоднородности с деградирующими прочностными характеристиками – моделирование агрессивного воздействия внешней среды, слои неоднородности с улучшенными прочностными характеристиками – моделирование технологического упрочнения. Для каждого варианта неоднородности приведены различные вариации: двусторонняя и односторонняя неоднородность по толщине, причем для односторонней неоднородности решена задача по отслеживанию линии центра тяжести в каждом сечении балки переменной толщины. На каждом этапе расчета, как в случае деградации, так и в случае упрочнения поверхностных слоев, проведена оценка качественного изменения эпюр напряжений по толщине балки в характерных сечениях при различных отношениях временного сопротивления материала в неоднородном слое к временному сопротивлению исходного материала. Проведен анализ изменения напряжений на поверхности балки и на границе фронта неоднородности для опорного и центрального сечений балки и представлены соответствующие графические результаты.

В работе А.А. Лиманцева и А.В. Денисенко [7] приведено решение задачи об определении оптимального расчетного сопротивления для стальной двутавровой балки из соображений проектирования наименее металлоемкого сечения. Дано определение и формулы для определения удельных характеристик сечения. Показаны наилучшие распределения материала в сечении при использовании сталей с разными сопротивлениями.

## 2. Методы

Для определения статических характеристик пильного цилиндра джина использован метод конечных элементов в форме перемещений [8 – 11].

Поэтому для уменьшения аналитических вычислений при расчете верхнего бруса пильного джина с переменной толщиной на изгиб можно использовать метод конечных элементов в форме перемещений.

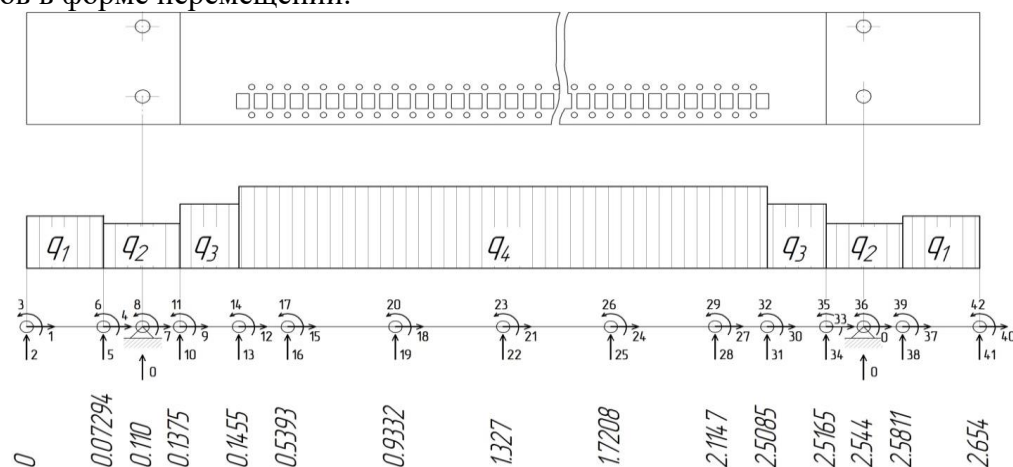


Рис. 1. Расчетная схема верхнего бруса пильного джина

На рис. 1 даны расчетная схема верхнего бруса пильного джина и действующие на него нагрузки. Расчетные значения момента инерции и параметры сечений верхнего бруса пильного джина приведены в табл. 1 и 2. Внешними нагрузками ( $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  и  $q_4$ ), действующими на верхний брус, являются следующие:

$$q_1 = \frac{m_1}{L_1} = \frac{0.822}{0.0729} = 11.27 \frac{\text{кз}}{\text{м}} = 110.51 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \quad q_2 = \frac{m_2 + m_3}{L_2} = \frac{0.373 + 0.277}{0.06456} = 10.07 \frac{\text{кз}}{\text{м}} = 98.73 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$q_3 = \frac{m_4}{L_3} = \frac{0.668}{0.008} = 83.5 \frac{\text{кз}}{\text{м}} = 818.8 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$q_4 = \frac{(m_0 + m_k)g + \frac{M_n}{r}}{L_4} = \frac{(35.044 + 89.655) \cdot 9.806 + \frac{974.4}{0.16}}{2.434} = 3004.43 \frac{H}{м},$$

где  $m_0=35.044$  кг – масса бруса между опорами;  $m_1=m_{14}=0.822$  кг;  $m_2=m_{13}=0.373$  кг;  $m_3=m_{12}=0.277$  кг;  $m_4=m_{11}=0.668$  кг;  $m_5=m_7=m_8=m_{10}=5.525$  кг;  $m_6=m_9=5.527$  кг; – соответственно массы элементов;  $m_k=139.0645$  кг=89.655 кг – масса колосников;  $L_1=0.0729$  м – длина первого элемента;  $L_2=0.06456$  м – длина второго элемента;  $L_3=0,008$  м – длина третьего элемента;  $L_4=2.434$  м – длина верхнего бруса между опорами;  $M_n=974.4$  Н·м – номинальная технологическая нагрузка на колосники от пильного цилиндра;  $r=0.16$  м – радиус пильного диска цилиндра.

Таблица 1

Расчетные значения момента инерции сечений верхнего бруса

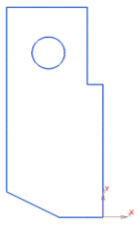
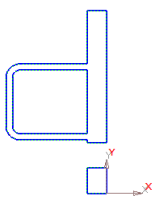
| № | Наименование показателей                                                                                                       | Тип сечений по нагрузкам                                                          |                                                                                    |                                                                                     |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                                                                                                                                | q <sub>1</sub> , q <sub>2</sub>                                                   | q <sub>3</sub>                                                                     | q <sub>4</sub>                                                                      |
|   |                                                                                                                                |  |  |  |
| 1 | Площадь, мм <sup>2</sup>                                                                                                       | 1440                                                                              | 10661.126                                                                          | 1791.965                                                                            |
| 2 | Центр масс, мм<br>X <sub>с</sub><br>Y <sub>с</sub>                                                                             | -6.0<br>60                                                                        | -38.010<br>80.095                                                                  | -17.240<br>63.750                                                                   |
| 3 | Осевые моменты инерции в центральном системе координат, мм <sup>4</sup><br>J <sub>x</sub><br>J <sub>y</sub><br>J <sub>xy</sub> | 1.728·10 <sup>6</sup><br>1.728·10 <sup>4</sup><br>0                               | 2.243·10 <sup>7</sup><br>4.591·10 <sup>6</sup><br>-1.821·10 <sup>6</sup>           | 1.686·10 <sup>6</sup><br>6.728·10 <sup>5</sup><br>7.553·10 <sup>4</sup>             |
| 4 | Угол наклона главных осей, °                                                                                                   | 90°                                                                               | 275° 46' 9.847427"<br>(275.769402°)                                                | 85° 45' 37.839618"<br>(85.760511°)                                                  |

Таблица 2

Расчетные параметры сечений верхнего бруса

| Координаты, м |        |        | Масса элемента, кг | Осевой момент инерции, м <sup>4</sup> | E*I     | E*F         |
|---------------|--------|--------|--------------------|---------------------------------------|---------|-------------|
| начало        | конец  | длина  |                    |                                       |         |             |
| 0             | 0.0729 | 0.0729 | 0,822              | 0.0000017280                          | 138240  | 115200000   |
| 0.0729        | 0.1100 | 0.0371 | 0.373              | 0.0000017280                          | 138240  | 102884956.8 |
| 0.1100        | 0.1375 | 0.0275 | 0.277              | 0.0000017280                          | 138240  | 102884956.8 |
| 0.1375        | 0.1455 | 0.0080 | 0.668              | 0.0000224305                          | 1794443 | 852890080   |
| 0.1455        | 0.5393 | 0.3938 | 5.525              | 0.0000016861                          | 134889  | 143357200   |
| 0.5393        | 0.9332 | 0.3939 | 5.527              | 0.0000016861                          | 134889  | 143357200   |
| 0.9332        | 1.3270 | 0.3938 | 5.525              | 0.0000016861                          | 134889  | 143357200   |
| 1.3270        | 1.7208 | 0.3938 | 5.525              | 0.0000016861                          | 134889  | 143357200   |
| 1.7208        | 2.1147 | 0.3939 | 5.527              | 0.0000016861                          | 134889  | 143357200   |
| 2.1147        | 2.5085 | 0.3938 | 5.525              | 0.0000016861                          | 134889  | 143357200   |
| 2.5085        | 2.5165 | 0.0080 | 0.668              | 0.0000224305                          | 1794443 | 852890080   |
| 2.5165        | 2.5440 | 0.0275 | 0.277              | 0.000001728                           | 138240  | 102884956.8 |
| 2.5440        | 2.5811 | 0.0371 | 0.374              | 0.000001728                           | 138240  | 102884956.8 |
| 2.5811        | 2.6540 | 0.0729 | 0.822              | 0.000001728                           | 138240  | 115200000   |

Изложим методику расчета верхнего бруса пильного джина. Расчет проводился с использованием балочного элемента с шестью степенями свободы (см. рис. 2,в). Этот

элемент (см. рис. 2,а) получается компоновкой балочного конечного элемента (см. рис. 2,б) и конечного элемента одноосного напряженного состояния (см. рис. 2,в).

Рассмотрим построение матрицы жесткости балочного конечного элемента. Зависимость между нагрузками и перемещениями бруса при изгибе можно получить, рассматривая энергетический функционал при изгибе [12–15]:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - 2 f(x) w \right] dx, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $I$  – момент инерции поперечного сечения;  $f$  – распределенная нагрузка на единицу длины.

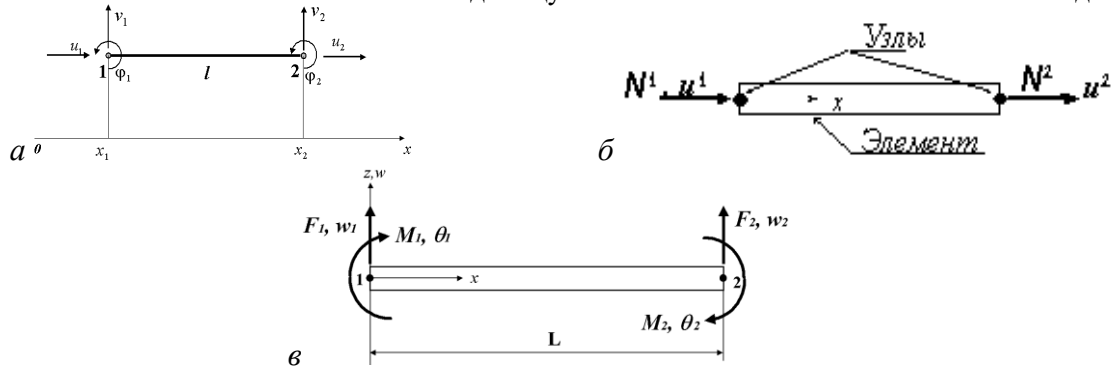


Рис. 2. Расчетные схемы балочных элементов

Пусть рассматриваемый брус (см. рис.1) разделён на  $S$  элементов типа (рис.2,а). Тогда энергетический функционал (1) можно записать в виде суммы энергетических функционалов каждого элемента:

$$I = \sum_S I^{(S)}. \quad (2)$$

В конечных точках элемента необходимо определять поперечные ( $w_1$  и  $w_2$ ) и угловые смещения ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ). Последние равны тангенсу угла наклона нейтральной оси, т.е.

$$\theta_1 = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}, \quad \theta_2 = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L}. \quad (3)$$

Запишем вектор узловых перемещений в виде

$$\{q\} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T. \quad (4)$$

Так как имеются четыре степени свободы, то для представления поля перемещений внутри конечного элемента нужно принять полином третьей степени

$$w = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = \begin{Bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Он является точной формулой прогиба балки, если принять, что силы и моменты действуют только на её концах. Коэффициенты полинома определяются из граничных условий

$$\left. \begin{aligned} w(0) &= w_1; w'(0) = \theta_1; \\ w(L) &= w_2; w'(L) = \theta_2; \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Вычисляя (5) для каждого из четырех условий (6), получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Решая относительно вектора  $\{a\}$  и подставляя его в (5), получим

$$w = [N]\{q\}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} [N] &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]; \\ N_1 &= (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2); \quad N_2 = -x(\xi - 1)^2; \\ N_3 &= (3\xi^2 - 2\xi^3); \quad N_4 = -x(\xi - \xi^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\xi = x/L$ ,  $N_i$  – полиномы Эрмита.

Функция формы обладает особенностью принимать единичное значение в узле, для которого она построена.

Подставляя (9) в (1), получим

$$I^{(s)} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{ij}^{(s)} q_i q_j - 2 \sum_{i=1}^4 p_i^{(s)} q_i, \quad (10)$$

$$\text{где } K_{ij}^{(s)} = \int_0^L [EI N_i'' N_j''] dx, \quad p_i^{(s)} = \int_0^L f(x)^{(s)} N_i dx.$$

В этих выражениях  $N_i'', i = \overline{1,4}$  равны  $N_1'' = -N_3'' = \frac{6}{L^2}(2\xi - 1)$ ,  $N_2'' = -\frac{2}{L}(3\xi - 2)$ ,  $N_4'' = -\frac{2}{L}(3\xi - 1)$ .

Если функция  $f(x)$  является равномерно распределенной нагрузкой, то ее можно вынести за знак интеграла.

Необходимыми условиями минимума функционала будут

$$\frac{\partial I^{(s)}}{\partial q_1^{(s)}} = 0, \dots, \frac{\partial I^{(s)}}{\partial q_4^{(s)}} = 0. \quad (11)$$

Отсюда получим  $\sum_{j=1}^4 K_{ij}^{(s)} q_j^{(s)} = r_i$  или в матричном виде

$$[K]^{(s)} \{q\}^{(s)} = \{r\}. \quad (12)$$

где  $[K]^{(s)}$  – матрица жёсткости конечного элемента  $s$ ,  $\{r\}$  – вектор эквивалентных узловых сил. Элементы матрицы жесткости имеют следующие значения:

$$K^{(s)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Полная энергия (функционал) системы получается суммированием энергий всех её элементов, т.е. (2), тогда для всей системы можно записать

$$[K]\{Q\} = \{R\}, \quad (14)$$

где  $R$  – вектор приведённых узловых нагрузок.

Для учета осевых деформаций, как указывалось, используется конечный элемент одноосного напряженного состояния. Рассмотрим построение матрицы жесткости этого элемента.

Изменение перемещений в элементе выражается в виде линейной функции вдоль оси стержня.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Линейная функция выбрана потому, что элемент имеет два узла, следовательно, линейная функция дает однозначное значение, так как через две точки можно провести только одну прямую.

Если это выражение запишется для  $x=0$  и  $x=L$ , то получим

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = [C] \{\alpha\}, \quad (16)$$

откуда

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [C]^{-1} \{q\}. \quad (17)$$

Подставив (5) в (1), получим

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 - \xi \quad \xi] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \{q\}. \quad (18)$$

Деформация в элементе определяется из выражения

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \{q\}, \quad (19)$$

а напряжения равны

$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = E[B] \{q\}. \quad (20)$$

Известно, что работы внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равны.

Пусть  $d\{q\}$  – возможные перемещения узлов конечного элемента. Тогда деформации запишутся в виде

$$d\varepsilon = [B](d\{q\}). \quad (21)$$

Работа, совершаемая узловыми силами, равна сумме произведений каждой силы на соответствующие перемещения, т.е. в матричном виде

$$(d\{q\})^T \cdot \{F\}. \quad (22)$$

Аналогично внутренняя работа напряжений, приходящаяся на единицу объёма, равна

$$d\varepsilon \cdot \sigma = [B](d\{q\}) \cdot \sigma. \quad (23)$$

Приравнявая работу внешних сил к суммарной внутренней работе, получаемой интегрированием по объёму элемента, имеем

$$(d\{q\})^T \cdot \{F\} = (d\{q\})^T \cdot \int [B]^T \cdot \sigma dV. \quad (24)$$

Это соотношение справедливо для любого возможного перемещения, поэтому коэффициенты в правой и левой частях должны быть равны

$$\{F\} = \int [B]^T \cdot E \cdot [B] \{q\} dV. \quad (25)$$

Выражение, которое стоит под интегралом, не зависит от объёма, поэтому можно записать

$$\{F\} = [B]^T \cdot E \cdot [B] \int dV \{q\} = [B]^T \cdot E \cdot [B] A \cdot L \{q\}. \quad (26)$$

Раскроем это выражение

$$\{F\} = [B]^T E [B] A L \{q\} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \cdot A \cdot L \{q\} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = [k] \{q\}. \quad (27)$$

Имея зависимость между внешними силами и перемещениями для одного элемента бруса, можно решать задачи для любых составных стержней. Матрица  $(k)$  называется матрицей жёсткости элемента. Теперь, объединяя матрицы балочного и одноосного элементов, получим

$$[r] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Эта матрица была нами использована для расчета верхнего бруса пильного джина на изгиб.

Конечный элемент представляет собой стержневой 2-плоский узловой элемент, в каждом узле которого имеется две степени свободы (см. рис. 2,а).

### 3. Результаты.

Используя матрицы жесткости (28) и системы линейных уравнений (15), мы построили эпюры изгибающих моментов (рис. 3), поперечных сил (рис. 4) и прогиба верхнего бруса пильного джина (см. рис. 5).

Установлено, что при максимальной 3004.43 Н/м нагрузке на верхний брус пильного джина прогиб достигается до 10.2 мм при L=1.327 м (рис.5).

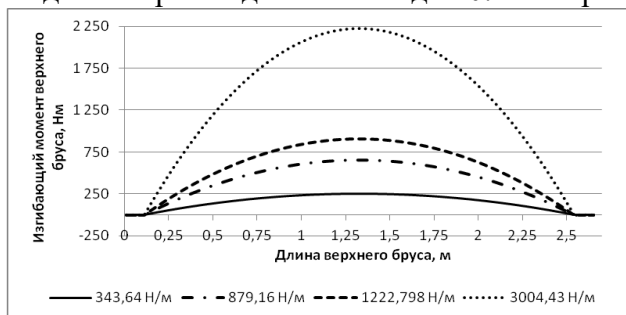


Рис. 3. Эпюра изгибающих моментов

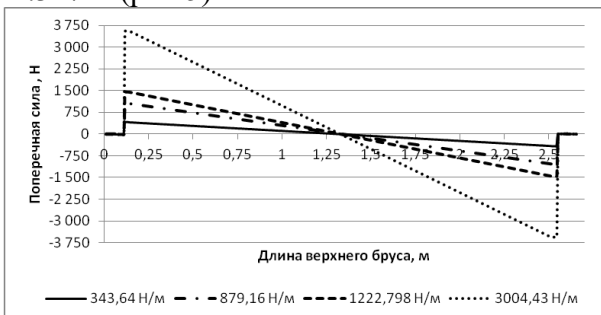


Рис. 4. Эпюра поперечных сил

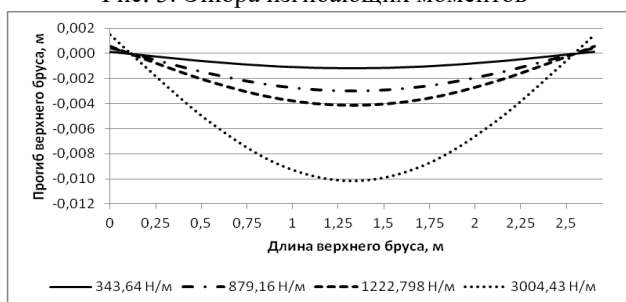


Рис. 5. Эпюра прогиба верхнего бруса

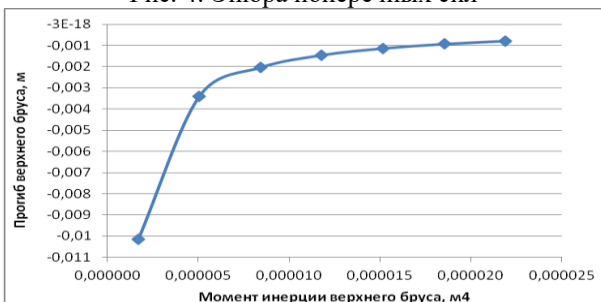


Рис. 6. Изменения прогиба верхнего бруса в зависимости от момента его инерции

Установлено, что одним из способов снижения прогиба верхнего бруса является увеличение момента его инерции. Поэтому было изучено влияние момента инерции верхнего бруса (рис. 6) на его прогиб.

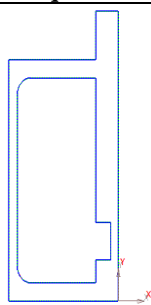
### 4. Анализ

В результате проведенных расчетных исследований при различных (343.64 Н/м, 879.16 Н/м, 1222.798 Н/м и 3004.43 Н/м) распределенных нагрузках определены эпюры прогиба верхнего бруса пильного джина (соответственно – 1.16; 2.97; 4.14 и 10.2 мм при L=1.327 м), изгибающих моментов (соответственно – 253.85; 650.09; 904.35 и 2222.60 Н·м при L=1.327 м), поперечных сил (соответственно – 415.28; 1047.99; 1454.0 и 3559.0 Н при L=2.544 м) с использованием метода конечных элементов в форме перемещений.

В результате изучения влияния момента инерции верхнего бруса (см. рис. 6) на его прогиб установлено, что прогиб верхнего бруса снижается до 0.78 мм при  $I=2.19 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  с максимальной нагрузкой, равной 3004.43 Н/м.

В результате произведенных исследований рекомендуется новая конструкция лобового бруса с моментом инерции  $I=3.314 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  (табл. 3).

Таблица 3

| Рекомендуемый тип сечения верхнего бруса по нагрузке $q_4$ |                                                                                                     |                                                                                     |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| №                                                          | Наименование показателей                                                                            |  |
| 1                                                          | Площадь, $\text{мм}^2$                                                                              | 9662.969                                                                            |
| 2                                                          | Центр масс, мм<br>$X_c$<br>$Y_c$                                                                    | -29.473<br>51.165                                                                   |
| 3                                                          | Осевые моменты инерции в центральной системе координат, $\text{мм}^4$<br>$J_x$<br>$J_y$<br>$J_{xy}$ | $3.314 \cdot 10^7$<br>$1.074 \cdot 10^7$<br>$-1.43 \cdot 10^7$                      |
| 4                                                          | Угол наклона главных осей, °                                                                        | $87^\circ 11' 19.557789''$ ( $87.188766^\circ$ )                                    |

## 5. Заключение

Произведенные расчеты и анализ результатов позволили рекомендовать новую конструкцию верхнего бруса для крепления многоразового колосника, обеспечивающего минимальный (до 0.4 мм) изгиб при моменте инерции  $I=3.314 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  с максимальной нагрузкой, равной 3004.43 Н/м.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мухаммадиев Д.М., Ахмедов Х.А., Ибрагимов Ф.Х., Мухаммадиев Ш.Д. Колосниковая решетка пильного джина (Патент Uz FAP № 01169). Официальный бюллетень. Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан, 2017. № 2. С. 50–51.
- [2] Мирошниченко Г.И. Основы проектирования машин первичной обработки хлопка. М.: Машиностроение, 1972. – 486 с.
- [3] Жемочкин Б.Н. Теория упругости// Учебное пособие для инженерно-строительных вузов и факультетов. М.: Гостройиздат, 1957. – 257 с.
- [4] Доманов Н.Н. Некоторые возможности применения рядов Фурье к определению изгибов балок // «Образование и наука в России и за рубежом». Научно-образовательный журнал Vol. 57, 2019, №9. <https://www.gyrnal.ru/uploads/statyi/p9v7g6r72qnrjbjoaqv0soji4njcbmw4brw7hbp41.pdf>.
- [5] Кочетова Э.А., Саля И.Л. Расчет балки на прочность при изгибе с использованием программы Microsoft Excel // Современные наукоемкие технологии. 2010. №3. С. 42–44.
- [6] Мищенко Р.В., Пименов Д.А. Расчет неоднородных балок переменной толщины // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2017. Т.9. №4. <http://naukovedenie.ru/PDF/07TVN417.pdf>
- [7] Лиманцев А.А., Денисенко А.В. Определение оптимального расчетного сопротивления и формы сечения двутавровой балки// Международный научно-исследовательский журнал 2018. № 1 (67) Часть 1. Январь С. 110-115. DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.67.080>
- [8] Мухаммадиев Д.М., Рахматкариев Ш.У., Арифжанов А.З. Статические характеристики пильного цилиндра волоконотделителя // Журнал «Вестник аграрной науки Узбекистана». Ташкент, 2001. №4. С. 62–69.
- [9] Mukhammadiev D.M., Rakhmatkariev Sh.U., Arifdzhanov F.Z. Analysis of static and dynamic characteristics of a saw cylinder of a gin. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. Vol. 38, 2009. No. 2, P. 120–123.
- [10] Mukhammadiev D.M., Ibragimov F.K., Mukhammadiev T.D. Modeling the Motion of a Saw Ginning Machine J. of Machinery Manufacture and Reliability 2020. 49(3). P. 256–262.
- [11] Мухаммадиев Д.М., Рахматкариев Ш.У., Бахадиров К.Г. Составление динамических и математических моделей машинного агрегата пильного цилиндра волоконотделителя // Журнал «Вестник аграрной науки Узбекистана». Ташкент, 2003. №1. С. 86–90.
- [12] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. – 541 с.

- [13] Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
- [14] Babamuratov K.Sh., Abirov R. A. On physical reliability in the theory of plasticity // Journal of Strength materials. 2001. №33(1). P. 1–7.
- [15] Abirov R.A. On the physical reliability and taking complex loading into account in plasticity // Journal of Materials science 2008. 44(4). P.512–516.

Дата поступления  
03.05.2021

**Мухаммадиев Д.М., Ахмедов Х.А., Эргашев И.О., Жамолова Л.Ю. Аррали жин юқори брусини эгилишига ҳисоблаш**

**Аннотация:** Қайта фойдаланиладиган колосникнинг янги конструкциясини яратилиши уни юқори брусга маҳкамлаш тешиклари катталашганлиги сабабли, аррали жин юқори брусини эгилишига ҳисоблаш зарур бўлди. Ўзгарувчан қалинликдаги арра жин юқори брусини эгилишига ҳисоблашда кўчириш шаклидаги чекли элемент усулидан фойдаланилган. Ўтказилган тадқиқотлар натижасида қайта фойдаланиладиган колосникни маҳкамлаш учун инерция моменти  $I=3.314 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  бўлган, максимал 300.43 Н/м юкланишида (0.4 мм) минимал эгиловчи арра жин юқори брусининг янги конструкцияси тавсия этилган.

**Калим сўзлар:** аррали жин; юқори брус; чекли элемент усули; эгилиш.

**Mukhammadiev D.M., Akhmedov H.A., Ergashev I.O., Jamolova L.Y. Calculation of the upper bar of the saw gin for bending**

**Abstract:** With the creation of a new design of a reusable grate, it became necessary to calculate the upper bar of the saw gin for bending due to an increase in the size of the holes for attaching the grate. The finite element method in the form of displacements was used in the design of the upper bar of the saw gin of variable thickness for bending. As a result of the research carried out, a new design of the frontal bar with a moment of inertia  $I=3.314 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$  was recommended for attaching a reusable grate providing a minimum (up to 0.4 mm) bending at a maximum load of 3004.43 N/m.

**Keywords:** saw gin; top bar; finite element method; bending.

УДК 621. 83

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЦЕПНОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПЕРЕМЕННЫМ МЕЖОСЕВЫМ РАССТОЯНИЕМ

**Турдалиев В.М., Комилов С.Р., Абдухалилова М.Г.**

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан  
E-mail: vox-171181@mail.ru

**Аннотация:** В статье приводятся результаты структурного и кинематического анализов цепной передачи с переменным межосевым расстоянием. Определена степень свободы предлагаемой цепной передачи. Получены уравнения для определения угловой скорости ведомой звездочки. На основе численного решения полученного уравнения определена закономерность изменения угловой скорости ведомой звездочки от изменения угловой скорости коромысла.

**Ключевые слова:** цепная передача; межосевое расстояние; механизм; звездочка; структура; кинематика; уравнения.

### 1. Введение

Технические возможности современных машин связаны с дальнейшим совершенствованием механизмов и приборов существующих конструкций, а также с оснащением их принципиально новыми механизмами и системами управления [1].

Проектирование машин и механизмов является сложной комплексной проблемой. Методология её решения включает научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы, направленные на изучение свойств как самих устройств в целом, так и входящих в них отдельных узлов, звеньев и деталей [2].

В технологических машинах для передачи движения применяются различные передаточные механизмы, в состав которых можно включить рычажные, зубчатые, цепные, ременные и тому подобные передачи. Они отличаются видами передачи движения, передаточным числом, а также работоспособностью при различных нагрузках. Некоторые из вышеперечисленных передач не рекомендуется применять в больших межосевых рассто-

яниях. Для передачи движения при больших межосевых расстояниях, в основном, используются цепные и ременные передачи. Из них применяются цепные передачи, так как за счет зацепления звездочек с цепью передача движения считается более надежной, вследствие чего обеспечивается постоянность передаточного числа [3].

На современном производстве разных отраслей машиностроения большое значение имеет создание многофункциональных машин и оборудования, легко и быстро переналаживаемых при изменении технологических процессов. Наряду с этим необходимость создания многофункциональных устройств, в свою очередь, выдвигает задачи построения принципиально новых механизмов, способных при небольшом изменении структуры или части геометрических параметров легко и быстро перенастраиваться на воспроизведение различных законов (траекторий) движений выходного звена, вытекающих из изменяющихся условий выполнения технологических процессов. Подобные задачи возникают, в частности, при разработке устройств формообразующих движений рабочих органов машин [4].

Строением механизма определяются такие его важнейшие характеристики, как виды осуществляемых движений, способы их преобразования и число степеней свободы. Формирование механизма, т.е. соединение отдельных его частей в единую систему, сопровождается наложением связей. Правильное их распределение в строении механизма в сильной степени предопределяет его надежную эксплуатацию. При исследовании существующих механизмов возникает необходимость в определении его кинематических параметров его точек и звеньев: положения, скорости, ускорения, зависящих от закона движения входных звеньев. При проектировании новых механизмов требуется получение заданных кинематических параметров, особенно для выходных (рабочих) звеньев [5].

## 2. Методы

Исходя из вышеизложенного, мы разработали цепную передачу для обеспечения качественного технологического процесса автоматического управления натяжением цепи при изменении межосевого расстояния [6].

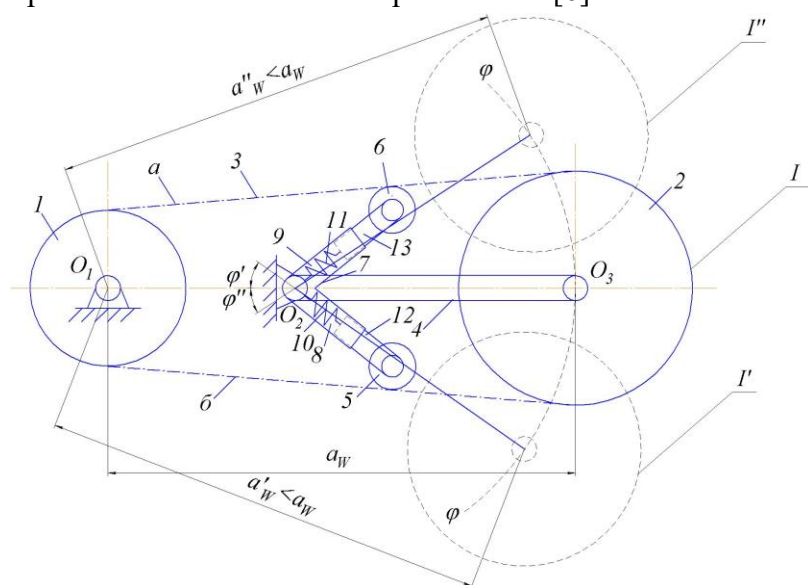


Рис. 1. Цепная передача с переменным межосевым расстоянием

га 4, в котором установлена ведомая звездочка, натяжные звездочки 5 и 6, установленные в двухплечном составном рычаге 7. Рычаг 4 в корпусе шарнирно установлен в точке  $O_2$ , при этом звездочка 2 шарнирно закреплена к рычагу 4 в  $O_3$ , а составной рычаг 7 неподвижно закреплён к рычагу 4. Во время рабочего процесса передачи при изменении межосевого расстояния между ведущей звездочкой 1 и ведомой звездочкой 2 для автоматического обеспечения натяжения цепи двухплечный рычаг изготовлен составным. Два плеча

Сущность предлагаемой конструкции заключается в том, что передача состоит из ведущей и ведомой звездочек, установленных в корпус цепной передачи, цепи, охватывающего рычага, в котором закреплена ведомая звездочка, натяжного устройства в виде натяжных звездочек.

На рис.1 изображен общий вид цепной передачи. Конструкция изобретения состоит из: ведущей звездочки 1 и ведомой звездочки 2, цепи 3, подвижного рычага 4, в котором установлена ведомая звездочка, натяжные звездочки 5 и 6, установленные в двухплечном составном рычаге 7. Рычаг 4 в корпусе шарнирно установлен в точке  $O_2$ , при этом звездочка 2 шарнирно закреплена к рычагу 4 в  $O_3$ , а составной рычаг 7 неподвижно закреплён к рычагу 4. Во время рабочего процесса передачи при изменении межосевого расстояния между ведущей звездочкой 1 и ведомой звездочкой 2 для автоматического обеспечения натяжения цепи двухплечный рычаг изготовлен составным. Два плеча

8 и 9 двухплечного рычага 7 выполнены в виде пустотелых цилиндров, внутри которых установлены пружины 10 и 11. Пружины 10 и 11 одним концом соединены с рычагом 7, а другим с натяжными звездочками 5 и 6, прикрепленными соответственно к рычагам 12 и 13.

Конструкция работает следующим образом. Вращательное движение передается от ведущей звездочки 1 к ведомой звездочке 2 при помощи цепи 3. Во время работы передачи звездочка 2 вращением из положения  $I$  по криволинейной траектории  $\varphi$ - $\varphi'$  переходит в положение  $I'$ , соответственно рычаг 4 со звездочкой 2 поворачивается на угол  $\varphi'$  и межосевое расстояние  $a_w$  автоматически изменяется на  $a_w$ . При этом  $a_w$  — это максимальное значение межосевого расстояния. При его изменении наблюдаются следующие зависимости:

$$a_w > a'_w \text{ и } a_w > a''_w.$$

При изменении межосевого расстояния в положении  $a'_w$  ведомая часть  $b$  уменьшается, а ведущая часть  $a$  будет увеличиваться, при этом составной рычаг 7 будет поворачиваться вместе с рычагом 4. В результате этого пружина 10, расположенная в цилиндрическом плече 8 составного рычага 7, будет прижиматься и тянуть рычаг 12 внутрь плеча 8. Натяжная звездочка 5, обеспечивающая натяжения ведомой части цепи  $b$ , будет перемещаться назад вместе с рычагом 12, так как он одним концом закреплен к пружине 10, которая расположена внутри цилиндрического плеча 8 и будет совершать поступательное движение. На втором конце рычага 12 шарнирно закреплена натяжная звездочка 6. Одновременно пружина 11, расположенная в цилиндрическом плече 9 составного рычага 7, будет растягиваться и рычаг 13, расположенный внутри цилиндрического плеча 9, будет перемещаться поступательно в наружную сторону. Натяжная звездочка 6, обеспечивающая натяжения ведущей ветви  $b$  цепи, вместе с рычагом 12 будет перемещаться вперед, в результате чего автоматически обеспечивается натяжение, потому что рычаг 13 одним концом закреплен к пружине 11, которая перемещается внутри цилиндрического плеча 9, а другим шарнирно закреплен с натяжной звездочкой 6. Если во время работы ведомая звездочка 2 будет перемещаться по криволинейной траектории  $\varphi$ - $\varphi'$  из положения  $I$  в положение  $I''$ , тогда она вместе с рычагом 4 будет поворачиваться на угол  $\varphi''$  и автоматически межосевое расстояние  $a_w$  изменится на  $a''_w$ . При изменении межосевого расстояния  $a_w$  на  $a''_w$  ведомая часть  $b$  будет увеличиваться. При этом рычаг 7 будет поворачиваться вместе с рычагом 4. Следовательно, пружина 11, расположенная внутри цилиндрического плеча 9 составного рычага 7, будет сжиматься и потянет рычаг 13 внутрь цилиндрического плеча 9. Натяжная звездочка 6, обеспечивающая натяжение ведущей ветви  $a$ , вместе с рычагом 13 возвращается назад. Следовательно, пружина 10, расположенная внутри цилиндрического плеча 8 составного рычага 7, растягиваясь, вынуждает поступательно двигаться рычаг 12 внутри цилиндрического плеча 8. Натяжная звездочка 6, обеспечивающая натяжение ведомой ветви  $b$ , вместе с рычагом 12 движется вперед и автоматически обеспечивает натяжение цепи 3. Данная конструкция позволяет регулировать натяжение цепи и изменение межосевого расстояния, следовательно, увеличивается ресурс работы передачи.

Анализ механизмов различного назначения показывает, прежде всего, необходимость рассмотрения функциональных и структурно-конструктивных особенностей звеньев и некоторых соединений, которые существенно отличаются от кинематических пар как по своему конструктивному исполнению, так и по той роли, которую они выполняют в составе механизмов. По функциональному назначению все звенья механизмов могут быть отнесены к двум типам: основным, из которых состоят кинематические цепи, и вспомогательным [7].

При кинематическом анализе предлагаемую цепную передачу исследуем по схеме, представленной на рис. 2, без учета влияния натяжных устройств на движение привода, так как натяжное устройство в передаче, представленной на рис.1, считается

вспомогательным звеном. Представленная цепная передача состоит из ведущей звездочки 1, ведущей ветви цепи 2, ведомой звездочки 3, ведомой ветви цепи 4, коромысла 5.

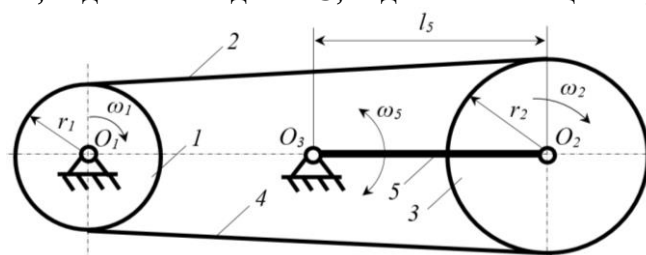


Рис. 2. Схема для кинематического анализа цепной передачи с переменным осевым расстоянием

Перед кинематическим анализом этой цепной передачи мы проводим ее структурный анализ, так как он считается одним из средств решения вопросов анализа и синтеза механизмов. Структурный анализ механизмов нашел отражение в работах П.Л. Чебышева, Л.В. Ассура, И.И. Артоболевского, Г.Х. Гохмана и др. [8].

В статье [9] представлена методика структурно-кинематического анализа зубчато-рычажных дифференциальных механизмов при симметричном перемещении центров вращения ведущей и ведомой шестерен с параллельными контурами. Определена степень подвижности дифференциального механизма. Получены выражения для аналогов угловых скоростей и угловых ускорений звеньев зубчатого механизма, а также линейных скоростей и ускорений рычажного механизма.

В работе [10] утверждается, что кинематическая связь гибкой пары звено–твердое тело является кинематической парой чистого качения, т.е. парой пятого класса. Кроме того, А.П. Малишев предлагает заменить гибкий элемент шатуном, звездочки – кривошипом и определить степень подвижности гибкой передачи [11].

Как известно, степень подвижности плоских механизмов определяется по формуле П.Л. Чебышева [12]

$$W=3n-2P_5-P_4, \quad (1)$$

где  $n$ – число подвижных звеньев механизме;  $P_5$ – число кинематических пар пятого класса;  $P_4$ – число кинематических пар четвертого класса.

Исходя из вышеизложенного, число подвижных звеньев в механизме, приведенном на рис. 2,  $n=4$ , число кинематических пар пятого класса  $P_5=5$  и число кинематических пар четвертого класса  $P_4=0$ . Определим степень свободы предлагаемой цепной передачи по формуле (1)

$$W=3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 0 = 2.$$

Следует отметить, что этот механизм имеет две обобщенные координаты, т.е.  $\varphi_1$  и  $\varphi_5$ .

### 3. Результаты

Следовательно, движение этой цепной передачи целесообразно исследовать через две обобщенные координаты: угол поворота ведущей звездочки ( $\varphi_1$ ) и угол поворота коромысла ( $\varphi_5$ ). В связи с этим выразим угол поворота ведущей звездочки следующим образом:

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1, \varphi_5), \quad (2)$$

где  $\varphi_1$ –угол поворота ведущей звездочки, градус;  $\varphi_5$ –угол поворота коромысла, градус.

Согласно правилам, продифференцируем выражение (2), образуя следующее:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_5} \frac{d\varphi_5}{dt}. \quad (3)$$

Если учесть, что  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ ,  $\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$  и  $\frac{d\varphi_5}{dt} = \omega_5$ , тогда дифференциальное уравнение (3) примет вид

$$\omega_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} \omega_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_5} \omega_5, \quad (4)$$

где  $\omega_1$ —угловая скорость ведущей звездочки,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\omega_5$ —угловая скорость коромысла,  $\text{с}^{-1}$ .

При кинематическом анализе механизмов скорости и ускорения ведомых звеньев и точек можно выразить в виде функций

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{d\varphi_i}{d\varphi} = \omega \cdot \dot{\omega}_i \text{ или } V_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d\bar{r}_i}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{d\bar{r}_i}{d\varphi} = \omega \cdot \dot{S}_i,$$

где  $\dot{\omega}_i$ —безразмерная угловая скорость звена  $i$ , называемая аналогом углового звена  $i$ ;  $\dot{S}_i$ —аналог скорости точки звена  $i$ , имеющей размерность длины.

Аналоги угловых скоростей по своему физическому смыслу есть передаточные отношения. Согласно [11], частное производное от угла  $\varphi_2$  по углам  $\varphi_1$  и  $\varphi_5$  — суть соответствующие передаточные отношения звеньев

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} = i_{21}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_5} = i_{25} \quad (5)$$

Если учесть уравнение (4), то уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$\omega_2 = i_{21} \omega_1 + i_{25} \omega_5. \quad (6)$$

Если угол поворота коромысла равен нулю, т. е. он не движется, то  $\omega_5=0$  и уравнение (6) можно записать следующим образом:

$$\omega_2 = i_{21} \omega_1. \quad (7)$$

Исходя из данных, представленных в [11], то

$$i_{21} = \frac{r_1}{r_2} \text{ и } i_{25} = \frac{l_5}{r_2}, \quad (8)$$

где  $r_1$ —радиус ведущей звездочки, м;  $r_2$ —радиус ведомой звездочки, м;  $l_5$ —длина коромысла, м.

Следовательно, если мы учтем уравнения (5) и (7), то выразим угловую скорость ведущей звездочки следующим образом:

$$\omega_2 = \frac{1}{r_2} (r_1 \omega_1 + \omega_5 l_5). \quad (9)$$

Как видно из схемы на рис. 2, коромысло совершает колебательное движение, т.е. в направлении движения звездочек и в противоположном их движению направлении. Если коромысло движется в направлении звездочки, то угловая скорость ведущей звездочки увеличивается, а если коромысло движется в противоположном направлении звездочке, то угловая скорость звездочки снижается.

Поэтому, учитывая направление движения коромысла, запишем выражение (6) в следующем виде:

$$\omega_2 = \frac{1}{r_2} (r_1 \omega_1 \pm \omega_5 l_5). \quad (10)$$

Если коромысло движется в направлении звездочки, тогда используется в знаке «плюс», если коромысло движется в противоположном направлении звездочке, тогда используется в знаке «минус».

#### 4. Анализ

Для определения закона изменения угловой скорости ведущей звездочки проведем численное решение выражения (10). Численное решение проведем при следующих значениях параметров:  $r_2=0.2$  м;  $r_1=0.1$  м;  $l_5=0.4$  м;  $\omega_1=50$   $\text{с}^{-1}$ ;  $\omega_5=0$   $\text{с}^{-1}$ ; 5  $\text{с}^{-1}$ ; 10  $\text{с}^{-1}$ .

На основе численного решения уравнения (10) был получен график, показанный на рис. 3. Как видно из графика, параметры соответствуют выбранным выше значениям, т.е. угловая скорость ведомой звездочки изменяется с прямолинейной закономерностью с увеличением угловой скорости коромысла. Однако, при изменении направления движения

коромысла можно увидеть увеличение или снижение угловой скорости ведущей звездочки. В этом случае, когда угловая скорость ведущей звездочки  $\omega_1=50 \text{ с}^{-1}$ , а угловая скорость коромысла  $\omega_5=0$ , угловая скорость ведомой звездочки составляет  $25 \text{ с}^{-1}$ .

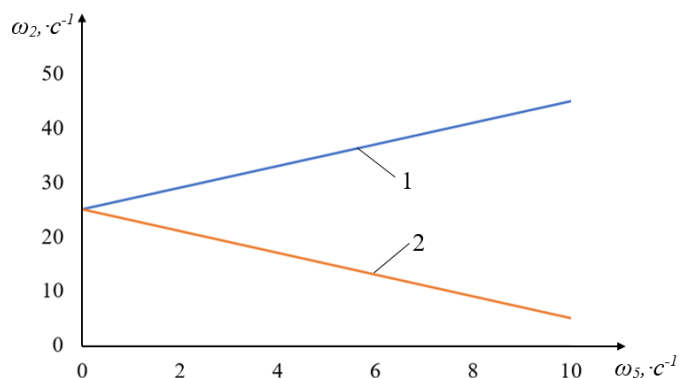


Рис. 3. Закономерность изменения угловой скорости ведомой звездочки от изменения угловой скорости коромысла: 1–коромысло движется в направлении звездочки; 2– коромысло движется в противоположном звездочке направлении

Из приведенного графика на рис. 3 видно, что угловая скорость ведущей звездочки изменяется с линейной закономерностью с увеличением угловой скорости коромысла.

## 5. Обсуждение

Механизмы с двумя степенями свободы обладают двумя обобщенными координатами. В нашем случае также предлагаемая цепная передача с двумя степенями свободы, т.е. обобщенные координаты угла поворота ведущей звездочки ( $\varphi_1$ ) и угла поворота коромысла ( $\varphi_5$ ), связывающего движение ведомой

звездочки. Поэтому данный механизм может быть использован воспроизведением функции двух переменных. В этом механизме можно использовать одну из двух обобщенных координат, т.е. угол поворота коромысла ( $\varphi_5$ ) с целью управления при технологических процессах.

## 6. Заключение

На основе структурного анализа определена степень свободы предлагаемой цепной передачи с переменным межосевым расстоянием. Путем кинематического анализа решена задача кинематики и получены уравнения для определения угловой скорости ведомой звездочки. Получена закономерность изменения угловой скорости ведомой звездочки от изменения угловой скорости коромысла.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Каркузашвили З.С. Анализ и синтез рычажных механизмов с переменной длиной входного звена: Дис.... канд. техн. наук. М.: 1999. –120с.
- [2] Краснов А.А. Развитие основ проектирования систем транспортирования нитей и тканей текстильных машин как механизмов с гибкими звеньями: Дис. докт.техн.наук. Иваново, 2010. –357с.
- [3] Mukhamedov Z., Turdaliyev V.M., Kosimov A.A. Kinematic Nonuniformity of the rotation of a toothed belt transmission with a composite pulley / Russian Engineering Research, 2020. P.705–709.
- [4] Шагинян С.С. Синтез переналаживаемых рычажных механизмов для воспроизведения семейства функций одной переменной: Дис.... канд. техн. наук. Ереван, 1984. –177с.
- [5] Нагаева М.В., Стародубцев П.А., Алифанов Р.Н. Новое в вопросах исследования движения шарнирного механизма с двумя степенями свободы / Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2014. №4 (23).
- [6] Турдалиев В., Комилов С., Косимов А. Разработка новой конструкции цепной передачи с переменными межосевыми расстояниями // Молодежь и XXI век – 2021: Материалы XI Международной молодежной научной конференции. Курск, 2021. С.87–90.
- [7] Невенчанная Т.О., Хохлова О.А. Структурно-конструктивные особенности кинематики цепей механизмов переменной структуры // Вестник АГТУ. 2005. №2(25). С. 104–111.
- [8] Хохлова О.А., Пономарев Е.В. Структурная классификация механизмов переменной структуры // Вестник АГТУ. 2012. №2(54). С. 57–62.
- [9] Alimukhamedov Sh.P., Abdurkarimov A., Sharifhodjaeva H.A., Rustamov K.J. Structural and Kinematic Analysis of Gear and Lever Differential Mechanisms by Symmetric Movement of Rotation Centers for Driving and Slave Gear Wheels // International Journal of Psychosocial Rehabilitation. London, 2020. P. 1573–1581.
- [10] Джураев А., Кенжабоев Ш. Структурный анализ и синтез кулисных механизмов с гибким звеном. Ташкент: Фан, 2004. –120 с.
- [11] Джураев А., Кенжабоев Ш. Разработка конструктивных схем и научные основы анализа и синтеза рычажных механизмов с упругими элементами и гибкими звеньями приводов технологических машин. Наманган, 2019. –268 с.

**Турдалиев В.М., Комилов С.Р., Абдухалилова М.Г. Ўқлараро масофаси ўзгарувчан занжирли узатманинг кинематик таҳлили**

**Аннотация:** Мақолада ўқлараро масофаси ўзгарувчан занжирли узатманинг структуравий ва кинематик таҳлили натижалари келтирилган. Таклиф этилган занжирли узатманинг эркинлик даражаси аниқланган ва етакланувчи юлдузчанинг бурчак тезлигини аниқлаш учун тенглама олинган. Олинган тенгламани сонли ечими асосида етакланувчи юлдузчанинг бурчак тезлигини коромислонинг бурчак тезлигини ўзгаришига боғлиқ ўзгариши қонуниятини аниқланган.

**Калим сўзлар:** Занжирли узатма; ўқлараро масофа; механизм; юлдузча; структура; кинематика.

**Turdaliev V.M., Komilov S.R., Abdukhaliyeva M.G. Kinematic analysis of the chain gear with variable center distance**

**Abstract:** The article presents the results of structural and kinematic analysis of chain transmission with variable center distances. The degree of freedom of the proposed chain transmission is determined and equations for determining the angular velocity of the driven sprocket are obtained. On the basis of the numerical solution of the obtained equation, the pattern of change in the angular velocity of the driven sprocket is determined from the change in the angular velocity of the rocker arm.

**Keywords:** chain transmission; center distance; mechanism; sprocket; structure; kinematics.

УДК 621.01

## ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБОЛОЧКОВОГО ШПИНДЕЛЯ СО СТРУКТУРНО-СВОБОДНЫМ СТЕРЖНЕМ

**Баратов Н.Б.**

Ташкентский государственный технический университет им. Ислама Каримова, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: nbbaratov@mail.ru

**Аннотация:** В статье приведены результаты теоретико-экспериментального исследования движения оболочкового шпинделя хлопкоуборочного аппарата со структурно-свободным (свободной массой) стержнем как многомассового сателлита планетарно-фрикционного механизма с внешним и внутренним зацеплением. Установлено и экспериментально подтверждено влияние структурно-свободной массы на процесс реверсирования направления движения сателлита.

**Ключевые слова:** механизм; планетарно; водило; сателлит; шпиндель; угловая скорость; свободная масса.

### 1. Введение

Шпиндельный барабан хлопкоуборочной машины, с точки зрения теории механизмов и машин, следует рассматривать как многосателлитный планетарный фрикционный механизм с внешним и внутренним зацеплением [1], т.е. за один оборот шпиндельного барабана каждый шпиндель (сателлит) дважды меняет направление движения (рис. 1).

Движение шпинделя на шпиндельном барабане происходит следующим образом. Приводные ролики шпинделей, контактируя с ремнями привода при вращении шпиндельного барабана  $\dot{\phi}_\delta$ , вращаются по направлению вращения барабана (в зоне съема хлопка со шпинделей) или против (в рабочей зоне). После каждой рабочей зоны расположены зоны холостого вращения шпинделей, где приводные ролики не имеют кинематической связи с ремнями.

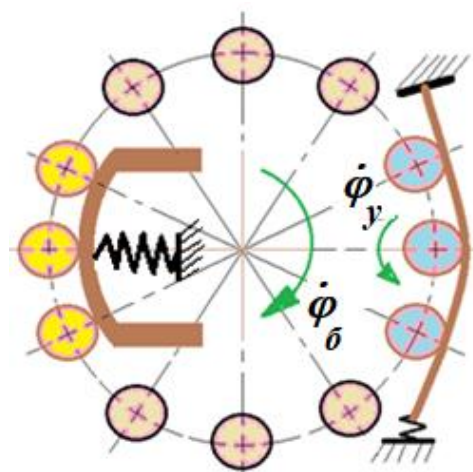


Рис. 1. Кинематическая схема привода шпинделей хлопкоуборочного аппарата

The diagram illustrates a mechanical system with two rotors, labeled 1 and 2, connected by a shaft. Rotor 1 has a mass moment of inertia  $m_1$  and is connected to a fixed support by a spring with stiffness  $R_0$ . Rotor 2 has a mass moment of inertia  $m_2$  and is also connected to a fixed support by a spring with stiffness  $R_0$ . The two rotors are connected by a shaft with torsional stiffness  $k$ . The shaft is divided into two segments with lengths  $l_1$  and  $l_2$ . The angular displacements of the rotors are denoted by  $\phi_1$  and  $\phi_2$ . The moments acting on the rotors are  $M_1$  and  $M_2$ , and the moments acting on the shaft segments are  $M_3$  and  $M_4$ . The diagram also shows the torsional stresses  $\tau$  and the shear modulus  $G$  of the shaft material.

Оболочковый шпиндель также является составным шпинделем как серийный винтовой. Подробное описание технологического процесса приведено в работе У.Х. Мансурова [5], где детально проанализирован процесс движения шпинделя и шпиндельного барабана с учетом всех фак-

В процессе работы шпиндельного барабана масса верхней части несущего стержня  $m_1$ , участвующая в системе в жестко соединенном виде с массой приводного ролика  $m_2$  и массой захватывающего элемента  $m_3$ , составляет узел

$$m_y = m_1 + m_p + m_3. \quad (3)$$

При этом малой свободой захватывающей оболочки относительно верхней части стержня, предназначенной для самоочищения оболочки путем встряхивания в моментах реверсирования, можно пренебречь. Такой прием является приемлемым при рассмотрении количества динамической массы шпинделя, возбуждающей силу инерции, а при рассмотрении встряхивания оболочки ее малая свобода выступает определяющей. Тогда кинетическая энергия составного стержня, согласно теореме Кенига [7], в рассматриваемой механической системе равна:

$$T_y = \frac{I_y \cdot \dot{\phi}_y^2}{2} + \frac{m_1 \cdot v_6^2}{2}, \quad (4)$$

$$T_2 = \frac{I_2 \cdot \dot{\phi}_2^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_6^2}{2}, \quad (5)$$

$$T_3 = \frac{I_3 \cdot \dot{\phi}_3^2}{2} + \frac{m_3 \cdot v_6^2}{2}, \quad (6)$$

где  $v_6 = R_6 \dot{\phi}_6$  – линейная скорость барабана;  $I_6$  – момент инерции шпиндельного барабана;  $I_y, I_1, I_2$  – моменты инерции узла, средней и нижней частей составного стержня соответственно;  $m_6$  – масса шпиндельного барабана;  $R_6$  – радиус шпиндельного барабана по центрам шпинделей;  $\dot{\phi}_6, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$  – угловые скорости соответственно шпиндельного барабана, верхнего узла, средней и нижней частей шпинделя.

Таким образом, общая кинетическая энергия многосателлитного планетарного фрикционного механизма с особенностью конструкции сателлита многомассового имеет следующий вид:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}_6^2 + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{m_{yi}}{2} (R_6 \dot{\phi}_6)^2 + \frac{1}{2} I_{yi} \dot{\phi}_{yi}^2 + \frac{m_{2i}}{2} (R_6 \dot{\phi}_6)^2 + \frac{1}{2} I_{2i} \dot{\phi}_{2i}^2 + \frac{m_{3i}}{2} (R_6 \dot{\phi}_6)^2 + \frac{1}{2} I_{3i} \dot{\phi}_{3i}^2 \right]. \quad (7)$$

Здесь слагаемые суммируются по  $i=1, n$ , где  $n=8-15$  – количество шпинделей на шпиндельном барабане. Кинетическая энергия шпинделей в переносном движении на барабане остается пропорциональной их количеству, а кинетическая энергия шпинделей при относительном движении будет меняться в зависимости от зоны расположения и режима их движения. Здесь массы средней структурно-свободной и нижней частей несущего стержня в процессе передачи крутящего момента, развиваемого в приводных роликах клиновыми ремнями, не будут участвовать, оставаясь неподвижными относительно собственной оси. Включение их в реверсивно-вращательное движение зависит только от момента трения в шарнирных сочленениях, что является несоизмеримо малым по сравнению с приводными моментами. Считая эти части неподвижными, выражение (7) можно преобразовать к виду

$$T = \frac{1}{2} \left[ I_6 + n(m_y + m_2 + m_3) R_6^2 \right] \dot{\phi}_6^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (I_{yi} \dot{\phi}_{yi}^2 + I_{2i} \dot{\phi}_{2i}^2 + I_{3i} \dot{\phi}_{3i}^2). \quad (8)$$

Выражение в средней скобке есть приведенный момент инерции шпиндельного барабана. Это существенно положительная  $2\pi$  – периодическая функция:

$$I_{np}(\phi_6) = I_6 + n(m_y + m_2 + m_3) R_6^2. \quad (9)$$

Переходим к вычислению моментов инерции составного стержня относительно его продольной оси.

Момент инерции узла верхней части стержня определяется формулой

$$I_y = I_1 + I_p + I_3, \quad (10)$$

где  $I_1$  – момент инерции верхней части составного стержня;  $I_p$  – момент инерции приводного ролика;  $I_3$  – момент инерции оболочкового захватывающего элемента.

Здесь

$$I_1 = \frac{m_1}{2}(r_1^2 - r_2^2). \quad (11)$$

Причем верхняя часть стержня представляет собой пустотельную цилиндрическую втулку, наружный радиус которой равен  $r_1 = 12$  мм, внутренний  $r_2 = 6$  мм;

$$I_p = m_p \rho_p^2, \quad (12)$$

где  $\rho_p$  – радиус инерции ролика, который определяется как радиус сложной конфигурации;

$$I_3 = m_3 R_3^2, \quad (13)$$

где  $R_3$  – радиус тонкостенного цилиндрического оболочкового захватывающего элемента (без учета окол зубцовых отверстий).

Подставляя выражения (11) – (13) в (10), получаем

$$I_y = \frac{m_1}{2}(r_1^2 - r_2^2) + m_p \rho_p^2 + m_3 R_3^2. \quad (14)$$

Момент инерции структурно-свободной части несущего стержня определяется формулой

$$I_2 = \frac{m_2}{2}(r_{a1}^2 - r_{a2}^2), \quad (15)$$

где индекс «а» означает, что параметры  $r_{a1}^2$  и  $r_{a2}^2$  относятся к структурно-свободной части стержня.

Момент инерции нижней части определяется формулой

$$I_3 = \frac{m_3}{2}(r_{n1}^2 - r_{n2}^2), \quad (16)$$

здесь индекс «н» обозначает нижнюю часть стержня.

В конструкции эти радиусы равны между собой, т.е.

$$r_1 = r_{a1} = r_{n1}, \quad r_2 = r_{a2} = r_{n2}. \quad (17)$$

Для дальнейших исследований представляет интерес определение величины момента трения в шарнирах, т.е. между верхней и структурно-свободной частями стержня, между структурно-свободной и нижней частями стержня и между нижней частью и пальцем нижней опоры шпинделя на барабан.

С этой целью обратимся к составлению и решению дифференциального уравнения вращения шпинделя для холостой зоны после выбега его из зоны сбора хлопка-сырца. В холостых зонах вместо условий связи в роли фактора выступает диссипация, выражаемая трением на шарнирах и сопротивлением воздуха окружающей среды (последним можно пренебречь).

Дифференциально уравнение вращения верхнего узла составного шпинделя (сателлита) имеет вид

$$I_{yi} \ddot{\varphi}_{yi} = -M_{ci}^T, \quad (18)$$

где  $M_{ci}^T$  – момент трения между верхней и структурно-свободной частями стержня  $i$ -шпинделя;  $\ddot{\varphi}_{yi}$  – угловое ускорение узла.

Решение дифференциального уравнения (18) определим при следующем начальном условии, вытекающем из конструкции привода шпинделя (см. рис. 2), т.е. при  $t_{нач.} \dot{\varphi}_{yi} = \omega_0$ . Интегрируя уравнение (18), при начальном условии имеем

$$\dot{\varphi}_{yi} = \omega_0 - \frac{M_{ci}}{I_{yi}} t. \quad (19)$$

При  $t = t_{ост}$ , естественно,  $\dot{\varphi}_{yi} = 0$ .

Время останова  $t_{ост}$  при заданном  $\omega_0$  определяется экспериментально. На основании вышеизложенного имеем

$$\omega_0 = \frac{M_{ci}^T}{I_{yi}} t_{ост}. \quad (20)$$

Таким образом, момент трения между верхней и антиинерционной частями определяется зависимостью

$$M_{ci}^T = \frac{I_{yi} \varphi_{yi}}{t_{ост}}. \quad (21)$$

Для сравнительного анализа несомненный интерес представляет определение теоретического (действительного) момента трения. Известно, что оно определяется выражением

$$M_{дейст} = f \cdot r_{эм} \cdot D, \quad (22)$$

где  $r_{эм}$  – радиус втулки;  $D$  – нормальное давление, равное

$$D = m_{yi} g; \quad (23)$$

$f$  – коэффициент трения.

Для полного динамического анализа составим дифференциальное уравнение много сателлитного планетарного фрикционного механизма с особенностью конструкции сателлита. С этой целью воспользуемся уравнением Лагранжа 2-го рода [8].

В качестве обобщенной координаты примем угловую скорость барабана  $\dot{\varphi}_6$ , а угловые скорости, приобретаемые через моменты трения в шарнирах средней структурно-свободной  $\dot{\varphi}_2$  и нижней  $\dot{\varphi}_3$  частями несущего стержня, не определяют положение механизма.

Как отмечалось, они имеют местное значение, создавая условия для уменьшения динамической массы [9] и самоочищения оболочкового захватывающего элемента [10].

Необходимо обратить внимание на следующий факт. Неоднородная часть дифференциального уравнения верхнего узла составного сателлита содержит момент сил трения, а неоднородная часть дифференциального уравнения структурно-свободной части сателлита – сумму моментов трения, возникающих в шарнирах.

Таким образом, дифференциальное уравнение движения многосателлитного планетарного фрикционного механизма с составным сателлитом имеет следующим вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_6} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_6} = M_d - M_c \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{yi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{yi}} = -M_{yi}^{дейст} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{2i}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{2i}} = -(M_{2i}^{дейст} + M_{3i}^{дейст}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{3i}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{3i}} = -M_{3i}^{дейст} \end{array} \right. \quad (24)$$

Здесь  $T$  – общая кинетическая энергия системы, определяемая формулой (7) или (8);  $M_\delta$  – движущий момент на валу барабана;  $M_c$  – моменты сил сопротивлений.

Величины этих моментов определяются на основании работ [4, 5]. После элементарных вычислений частных и полных производных уравнений (24) приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left[ I_\delta + n(m_y + m_2 + m_3)R_\delta^2 \right] \ddot{\phi}_\delta = M_\delta - M_c \\ I_{yi} \ddot{\phi}_{yi} = -M_{yi}^{\text{дейст}} \\ I_{2i} \ddot{\phi}_{2i} = -(M_{2i}^{\text{дейст}} + M_{3i}^{\text{дейст}}) \\ I_{3i} \ddot{\phi}_{3i} = -M_{3i}^{\text{дейст}} \end{cases} \quad (25)$$

Это дифференциальное уравнение составного сателлита может быть переписано по зонам для каждого сателлита (в частности, для первого):

$$\begin{cases} I_{yi} \ddot{\phi}_{yi} = -M_{yi}^{\text{дейст}} \\ I_{2i} \ddot{\phi}_{2i} = -(M_{2i}^{\text{дейст}} + M_{3i}^{\text{дейст}}) \\ I_{3i} \ddot{\phi}_{3i} = -M_{3i}^{\text{дейст}} \end{cases} \quad (26)$$

Необходимо отметить тот факт, что момент сил трения  $M_c$  (см. рис. 2.) включает моменты сил трений в верхней  $M_{\delta\theta}^T$  и нижней  $M_{\delta n}^T$  опорах шпиндельного барабана, на приводном ремне  $M_p^T$ , в верхней  $M_n^T$  и нижней  $M_{3и}^T$  опорах шпинделя, трение на верхнем  $M_{1и}^T$  и нижнем  $M_{2и}^T$  шарнирных сочленениях структурно-свободного стержня:

$$M_c = M_{\delta\theta}^T + M_{\delta n}^T + M_p^T + M_n^T + M_{1и}^T + M_{2и}^T + M_{3и}^T. \quad (27)$$

При составлении уравнений имеем в виду, что момент сил трения  $M_p^T$  является движущим для верхнего узла оболочкового шпинделя,  $M_{1и}^T$  – движущим для структурно-свободной части стержня;  $M_{2и}^T$  – движущим для нижней части стержня.

Учитывая зависимость производных  $\dot{\phi}_{и} = \frac{R_\delta}{r_k} \dot{\phi}_\delta$ , где  $r_k$  – радиус качения приводного ролика, получим систему уравнений движения многосателлитного планетарного фрикционного механизма с учетом особенности конструкции сателлита:

$$\begin{cases} I_{np} \ddot{\phi}_\delta = M_\delta - M_c \\ I_{yi} \frac{R_\delta}{r_k} \ddot{\phi}_\delta = M_p^T - (M_n^T + M_{1и}^T + M_{2и}^T + M_{3и}^T) \\ I_{2i} \ddot{\phi}_{2i} = M_{1и}^T - (M_{2и}^T + M_{3и}^T) \\ I_{3i} \ddot{\phi}_{3i} = M_{2и}^T - M_{3и}^T \end{cases} \quad (28)$$

При оснащении шпиндельного барабана хлопкоуборочной машины оболочковыми шпинделями со структурно-свободным стержнем реверсирование направления вращения шпинделя происходит очень быстро в силу того, что его структурно-свободная часть не будет участвовать в передаче крутящего момента, развиваемого в приводных роликах при движении шпиндельного барабана. Здесь крутящий момент передается только верхней части стержня и оболочковому захватывающему элементу, а средняя и нижняя части выполняют лишь функцию несущего стержня. Необходимость нижнего шарнирного соединения частей стержня обусловлена тем, что при вращении шпинделя из-за консольности крепления оболочкового захватывающего элемента к части несущего стержня может про-

изойти перекося и возникнуть трение между стержнем и нижней опорой. Наличие же шарниров между ними позволяет избежать эти явления.

Теперь рассмотрим более характерные участки привода шпинделей, где осуществляется реверсирование направления вращения шпинделей. Это явление происходит на начальных участках ремней прямого и обратного вращения при входе в сцепление с ними приводных роликов шпинделей. Проанализируем движение шпинделей в зоне первого холостого хода, считая постоянной угловую скорость шпиндельного барабана, и определим влияние массы (момента инерции) шпинделя на процесс привода.

Решения полученных дифференциальных уравнений проиллюстрируем на примере исследования движения шпинделя в свободной зоне. Для этого используем дифференциальное уравнение для одного структурно-свободного шпинделя, а именно: верхнего узла. Такой тип будет общим как для цельнометаллического, так и для структурно-свободного шпинделя. Они отличаются между собой только величиной массы.

Для удобства введем обозначение

$$M_{c.c} = M_p^T - (M_n^T + M_{1ш}^T + M_{2ш}^T + M_{3ш}^T). \quad (29)$$

Тогда уравнение движения одного шпинделя описывается формулой

$$I_{ш} \ddot{\varphi}_{ш} = -M_{c.c}, \quad (30)$$

где  $I_{ш}$  – момент инерции шпинделя относительно собственной оси вращения;  $\ddot{\varphi}_{ш}$  – угловое ускорение шпинделя;  $M_{c.c}$  – моменты сил сопротивления.

Шпиндель, выйдя из рабочей зоны, при установившемся движении шпиндельного барабана ( $\omega_b = 11.6 \text{ с}^{-1}$ ) имеет определенное число оборотов, которое при нормальном отрегулированном состоянии приводных ремней без учета скольжения подсчитывается по следующей формуле [1–13]:

$$\Omega_{ш} = \frac{\omega_b R_b}{r_k}, \quad (31)$$

где  $R_b$  – радиус шпиндельного барабана по центрам шпинделей;  $r_k$  – радиус качения ролика шпинделя по приводным ремням;  $\omega_b$  – угловая скорость шпиндельного барабана;  $\Omega_{ш}$  – абсолютная угловая скорость шпинделя.

Абсолютная угловая скорость шпинделя при вращении его вокруг своей оси равна

$$\Omega_{ш} = \omega_b \pm \omega_{ш}, \quad (32)$$

где  $\omega_{ш}$  – относительная угловая скорость шпинделя; знак «плюс» – для внутреннего сцепления (рабочая зона); знак «минус» – для внешнего сцепления (зона съема).

Из (30) для рабочей зоны определим относительную угловую скорость шпинделя

$$\dot{\varphi}_{ш} = \omega_b + \Omega_{ш}. \quad (33)$$

Для зоны съема

$$\dot{\varphi}_{ш} = \omega_b - \Omega_{ш}. \quad (34)$$

Характерными в приводе шпинделей являются зоны их реверсирования, которое происходит в начале контакта приводных роликов шпинделей с ремнями прямого и обратного вращения. Причем зонам реверсирования предшествуют в приводе зоны холостого хода, где на движение шпинделя влияет трение между верхней и нижней опорами и окружающей средой, которым можно пренебречь.

Сектор барабана между концом ремня рабочей зоны и началом колодки обратного вращения называется первой, а сектор барабана между концом колодки обратного вращения и началом ремня прямого вращения – второй холостыми зонами.

Будем рассматривать процесс движения шпинделей после выхода их из сцепления с ремнями прямого вращения, т.е. в зоне первого холостого хода. В этой зоне шпиндели продолжают вращение по приобретенной инерции. Определяем время остановки шпинде-

ля и соответствующий этому времени угол поворота шпиндельного барабана  $\phi_6$  путем решения уравнения (30) для случая, когда  $M_{c.c} = M_m$ , где  $M_m$  – моменты сил трения одного шпинделя в его нижней и верхней опорах. Из (30) получим

$$\ddot{\phi}_{u1} = -\frac{M_T}{I_{u1}}, \quad (35)$$

где  $\ddot{\phi}_{u1}$  – ускорение шпинделя относительно собственной оси вращения в первой зоне холостого хода.

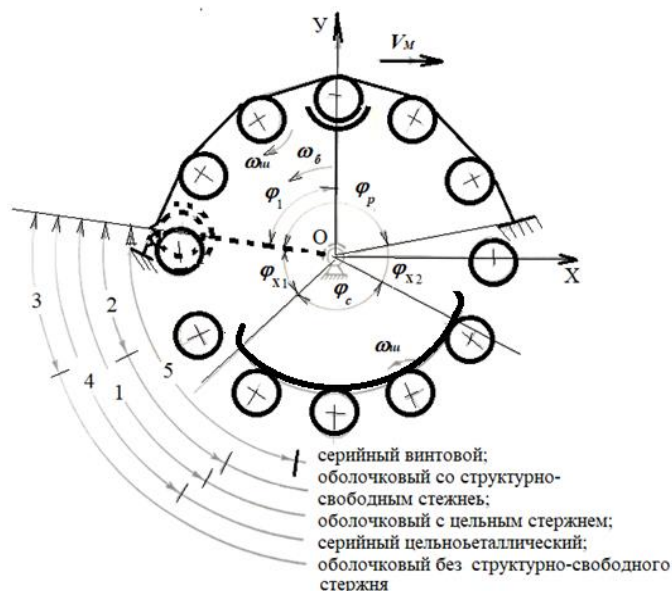


Рис. 3. Схематическое изображение углов поворота шпиндельного барабана до остановки шпинделей различных конструкций после выбега их из сцепления с ремнями привода: 1 – 1.218 рад.; 2 – 0.596/1.241; 3 – 0.545; 4 – 1.145; 5 – 1.601 рад.

будет соответствовать  $\phi_6 = \phi_1$ ,  $\dot{\phi}_{u.cв} = \omega_{u.cв}$ . Здесь  $\phi_1$  – угол поворота шпиндельного барабана в момент выхода роликов шпинделей из сцепления с ремнями прямого вращения.

Начальные условия движения имеют вид при  $t_{нач}$ .  $\phi_{u1} = 0$ .

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (35) и имея в виду, что

$$\frac{d\phi_u}{dt}(\dot{\phi}_u) = -\frac{M_T}{I_u}, \quad d\phi_u(\dot{\phi}_u) = -\frac{M_T}{I_u} dt, \quad \dot{\phi}_u = -\int \frac{M_T}{I_u}. \quad (36)$$

получаем

$$\dot{\phi}_u = -\frac{M_T}{I_u} t + C_1. \quad (37)$$

При начальных условиях находим

$$\dot{\phi}_u = \omega_{u.cв} - \frac{M_T}{I_u} t, \quad (38)$$

где  $\omega_{u.cв}$  – угловая скорость шпинделя после выхода из приводного вращения, т.е. в свободной зоне.

Формула (38) дает возможность определить угловую скорость шпинделя при любом требуемом промежутке времени между установившимся движением ( $\omega_{u.cв}$ ) и остановом ( $\omega_u = 0$ ).

Переходим к выводу формулы для вычисления угла перемещения шпинделя в рассматриваемой зоне. Для этого уравнение (38) интегрируется второй раз:

Принимаем следующую систему отсчета координат точек на барабане. Размещая начало координат на оси вращения шпиндельного барабана, направим ось абсцисс  $OX$  параллельно оси ряда хлопчатника, т.е. по направлению поступательного движения хлопкоуборочной машины  $V_m$ . Тогда положение шпинделя на барабане, соответствующее наиболее узкой рабочей щели между парой шпиндельных барабанов, будет соответствовать  $\phi = 90^\circ$  (рис. 3).

Указанные на рис.3  $\phi_p$ ,  $\phi_{x1}$ ,  $\phi_c$ ,  $\phi_{x2}$  ( $165^\circ$ ,  $53^\circ$ ,  $107^\circ$  и  $35^\circ$ ) [11–13] будут соответствовать углам рабочего, первого холостого, съемного и второго холостого секторов барабана. Поставленная выше задача заключалась в том, чтобы исследовать движение шпинделя в первой холостой зоне. Это положение шпинделя

$$\varphi_{ш} = \int (\omega_{ш.св} - \frac{M}{I}) dt. \quad (39)$$

Решив это уравнение, получим формулу для угла поворота шпинделя

$$\varphi_{ш} = \omega_{ш.св} \cdot t - \frac{M_T}{2I_{ш}} t^2 + C_2. \quad (40)$$

Итак, подставляя  $t_{ш}=0$ ,  $\varphi_{ш}=0$  в (40), имеем  $C_2 = 0$ :

$$\varphi_{ш} = \omega_{ш.св} \cdot t - \frac{M_T}{2I_{ш}} t^2. \quad (41)$$

Для того, чтобы определить угол поворота шпинделя, на который он повернулся до останова, следует предварительно вычислить соответствующий момент времени. В момент останова  $t_{ш}=\tau$  угловая скорость шпинделя должна быть  $\dot{\varphi}_{ш}=0$ . Подставляя эти значения в уравнение (38), получаем

$$\tau = \frac{\omega_{ш.св} I_{ш}}{M_T}. \quad (42)$$

Для определения угла поворота шпинделя  $\varphi_{ш}^{\tau}$  в момент останова остается подставить найденное значение  $\tau$  в уравнение (41). Тогда получим

$$\varphi_{ш}^{\tau} = \frac{\omega_{ш.св}^2 I_{ш}}{2M_T}. \quad (43)$$

Число оборотов, которое сделал шпиндель до останова, равно

$$n^{\tau} = \frac{\varphi_{ш}^{\tau}}{2\pi} = \frac{\omega_{ш.св}^2 I_{ш}}{4\pi M_T}. \quad (44)$$

Угол поворота шпиндельного барабана  $\varphi_{б}$  в момент останова шпинделя определяем, воспользовавшись зависимостями (32) и (30) для исследуемой зоны.

Определяя абсолютную из (31) и относительную из (34) угловые скорости вращения шпинделя вокруг собственной оси, можно найти время останова его, воспользовавшись зависимостью (42). Для этого нам необходимо знать величины момента инерции шпинделя и момента сил трения в опорах для рассматриваемой зоны. Из формулы (42) видно, что время останова шпинделя зависит от его момента инерции.

Нам предстояло решить задачи повышения агротехнических показателей уборочного аппарата и надежности его узлов.

Известно, что момент инерции серийного цельнометаллического шпинделя равен  $J_{ш}=0.00122 \text{ кг}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2$  [4], а серийного винтового составного шпинделя  $J_{ш}=0.00171 \text{ кг}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2$  [14]. Моменты инерции оболочкового шпинделя с его разновидностями были нами определены, а из-за близости массы его с серийным винтовым составным шпинделем нарушения в передаче движения шпинделей в барабане не наблюдалось. Пользуясь известным методом падающего груза [15], мы определили экспериментальным и аналитическим путями моменты инерции оболочкового с цельным стержнем, оболочкового со структурно-свободным стержнем и оболочкового без несущего стержня шпинделей. Для сравнения были найдены моменты инерции серийных шпинделей (табл. 1).

Таблица 1

Моменты инерции серийных шпинделей

| Разновидности шпинделей                       | Масса, кг | Момент инерции, $\text{кг}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2$ |                   |
|-----------------------------------------------|-----------|----------------------------------------------------------|-------------------|
|                                               |           | аналитический                                            | экспериментальный |
| Оболочковый с цельным стержнем                | 1.71      | 0.0013                                                   | 0.00142           |
| Оболочковый со структурно-свободным стержнем  | 1.73      | 0.00133                                                  | 0.00172           |
| Оболочковый без структурно-свободного стержня | 0.75      | 0.0005796                                                | 0.0005998         |
| Серийный цельнометаллический                  | 1.41      | 0.00122                                                  | 0.00129           |
| Серийный винтовой составной                   | 1.81      | 0.00171                                                  | 0.00183           |

Аналитическим путем были вычислены также следующие моменты инерции каждой части оболочкового шпинделя со структурно-свободным стержнем ( $\text{кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$ ):

|                                                   |           |
|---------------------------------------------------|-----------|
| <i>Верхняя часть стержня с приводным роликом</i>  | 0.00029   |
| <i>Средняя структурно-свободная часть стержня</i> | 0.0006957 |
| <i>Оболочковый захватывающий элемент</i>          | 0.0002334 |
| <i>Нижняя часть стержня</i>                       | 0.000116  |
| <i>Крепежное кольцо</i>                           | 0.0000058 |

Сумма этих моментов инерции оболочкового шпинделя со структурно-свободным стержнем равна  $0.0013316 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$ . Здесь момент инерции структурно-свободной части стержня (0.0006957) составляет больше половины общего момента инерции шпинделя. Значит, в передаче крутящего момента, развиваемого в приводных роликах клиновыми ремнями привода шпинделей, участвует лишь момент инерции  $I_{ш} = 0.000635 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$ .

Подставляя найденные значения  $\omega_{ш.св}$  из (32), момент инерции шпинделей из табл. 1 и величину момента трения в опорах из [16] в формулу (42), находим время останова шпинделя и соответствующий угол поворота шпиндельного барабана (табл. 2).

Таблица 2

Угол поворота шпиндельного барабана

| Разновидности шпинделей                       | $t_{ш}, \text{с}$      | $\varphi_{б}, \text{рад.}$ |
|-----------------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| Оболочковый с цельным стержнем                | 0.105                  | 1.218                      |
| Оболочковый со структурно-свободным стержнем  | <u>0.107</u><br>0.0514 | <u>1.241</u><br>0.596      |
| Оболочковый без структурно-свободного стержня | 0.047                  | 0.545                      |
| Серийный цельнометаллический                  | 0.0987                 | 1.145                      |
| Серийный винтовой составной                   | 0.138                  | 1.601                      |

*Примечание:* В знаменателе даны значения, найденные для случая, когда средняя часть стержня не участвует в передаче крутящего момента, для оболочкового шпинделя со структурно-свободным стержнем.

### 3. Выводы

1. Разработаны теоретико-экспериментальные основы конструкции многомассовой механической системы. Получены основные аналитические зависимости для планетарно-фрикционного многосателлитного механизма, сателлиты которого являются многомассовыми и имеют дополнительную степень свободы, позволяющую уменьшить динамическую массу сателлита при его реверсивном движении.

2. Аналитическим и экспериментальным путями определены моменты инерции различных конструкций вертикальных шпинделей хлопкоуборочной машины и углы поворота шпиндельного барабана до полной остановки шпинделей после выбега из сцепления с приводными ремнями в зависимости от их массы ( $\text{рад.}$ ): 1.145 – для серийного цельнометаллического, 1.601 – для винтового составного, 1.218 – для оболочкового с цельным стержнем, 0.596/1.241 – для оболочкового с рекомендуемым стержнем и 0.545 рад. для оболочкового шпинделя без несущего стержня, а также, аналитическим путем вычислены моменты инерции каждой части оболочкового шпинделя со структурно-свободным стержнем.

3. Установлено уменьшение угла поворота шпиндельного барабана при полной остановке шпинделей после их выхода из сцепления с приводными ремнями при снижении динамической массы и инерции, что способствует снижению динамического удара роликов шпинделей о приводные ремни в момент реверсирования их вращения, а следовательно, повышению долговечности привода.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1975. – 638 с.
- [2] Лойцанский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики Ч.1. М.: Гостехтеориздат. 1948. – 580 с.
- [3] Булатов Р.Б. Сравнительное исследование фрикционного привода шпинделей с клиновыми и плоскими дорожками хлопкоуборочной машины: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Ташкент, 1973.

- [4] Глуценко А.Д. Динамика механизмов привода шпинделей уборочных аппаратов хлопкоуборочных машин. Ташкент: Фан, 1985. – 154 с.
- [5] Мансуров У.Х. Основы технологического процесса хлопкоуборочных машин. Ташкент: Фан, 1986.-120 с.
- [6] Файзиев И.Х., Баратов Н.Б. Использование лишних степеней свободы в механизмах (на примере оболочкового шпинделя) // ДАН УзССР. 1980. № 8. С. 14–15.
- [7] Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика. М.: Наука, 1972. Т. 11. – 624 с.
- [8] Уразбаев М.Т. Основной курс теоретической механики. Ташкент: «Учитель», 1966.– 639 с.
- [9] А.с. 826993 (СССР). МКИ АО1 Д 46/16. Шпиндель хлопкоуборочного аппарата / Файзиев И.Х., Баратов Н.Б., Абдувалиев У.А., Икрамов А.М., Шамшидинов А. // Открытия. Изобретения. 1981. № 17. С. 4.
- [10] Файзиев И.Х., Баратов Н.Б. Использование лишних степеней свободы в механизмах (на примере оболочкового шпинделя) // ДАН Уз ССР. 1980. № 8. С. 14–15.
- [11] Коростылев В.А. Оптимизация захватывающего элемента составного шпинделя хлопкоуборочной машины по критерию минимального веса с учетом динамических характеристик рабочего процесса: Автореф. дис.... канд. техн. наук. Ташкент, 1983.–19 с.
- [12] Баратов Н.Б., Файзиев И.Х. Влияние массы антиинерционного оболочкового шпинделя на процесс износа ремней привода // Механизация хлопководства. 1986. № 6. С. 8–9.
- [13] Файзиев И.Х., Баратов Н.Б. Аналитические выражения процесса привода шпинделей хлопкоуборочных аппаратов для составления дифференциальных уравнений // Теория механизмов и машин хлопкового комплекса. Ташкент: Фан, 1979. С. 82–88.
- [14] Ильясов Х.К. Экспериментальное исследование влияния составных шпинделей на износ приводных ремней аппарата хлопкоуборочной машины // Динамика и рабочие процессы в технологических машинах. Ташкент: Фан, 1982. С. 166 – 171.
- [15] Турбин Б.И. К определению моментов инерции деталей и узлов сельскохозяйственных машин // Сельскохозяйственная машина. 1957. №6.
- [16] Глуценко А.Д. Исследование динамических процессов в основных узлах уборочных аппаратов вертикально-шпиндельных хлопкоуборочных машин: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. Ташкент: АН УзССР, 1971. – 38 с.

Дата поступления  
28.05.2021

**Н.Б. Баратов. Таркибий-эркин жойлашган стерженли қобикли шпиндел ҳаракатининг назарий-экспериментал тадқиқотлари**

Мақолада таркибий-эркин жойлашган стерженли пахта териш апаратининг қобикли шпиндели, ташиқи ва ички маҳкамланган планетар-фиркцион механизмнинг кўп массали сателлити сифатида кўриб ўрганишининг назарий ва экспериментал тадқиқотлари тадқиқ қилинган. Сателлит ҳаракати йўналишии реверсивлаштириши жараёнида таркибий-эркин массанинг таъсири тажрибавий ўрганилган ва тасдиқланган.

**Калим сўзлар:** механизм; планетар, водило; сателлит; шпиндель; бурчак тезлик, бурчак тезланиш, эркин масса таркибий-эркин, қобикли шпиндел.

**Baratov N.B. Theoretical and experimental study of the motion of a shell-type spindle with a structural-free rod.**

**Abstract.** In this article the results of a theoretical and experimental study of the movement of a shell-type spindle of a cotton picker with a structurally free (free mass) rod as a mass satellite of a planetary friction mechanism with external and internal gearing are presented. The effect of structurally free mass on the process of reversing the direction of the satellite movement is established and experimentally confirmed.

**Keywords:** mechanism; planetary; carrier; satellite; spindle; angular velocity; angular acceleration; free mass; structurally free; envelope; shell-type spindle.

**ПЕРЕМЕННЫЕ МОДУЛИ ДЕФОРМАЦИИ СУГЛИНКОВ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ****П.В. Логинов***Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: lopavi88@mail.ru*

**Аннотация:** На основе имеющихся в научной литературе экспериментальных диаграмм между компонентами напряжения и деформации для суглинков определены зависимости границы упругого и пластического деформирования мягких грунтов. Уточнены изменения модуля деформации образцов суглинков, с различной плотностью и влажностью. Установлено, что модули деформации суглинистых грунтов при деформировании изменяются нелинейно. Предложено учесть эти изменения в законах деформирования грунтов.

**Ключевые слова:** грунт; диаграммы сжатия суглинков; модуль деформации.

**1. Введение**

Прочностные характеристики различных грунтов экспериментально определены в [1]. Экспериментальные диаграммы между компонентами напряжения и деформации для мягких грунтов являются нелинейными [2]. Нелинейные диаграммы качественно различаются для грунтов ненарушенных и нарушенных структур. Считается, что проявления нелинейных свойств грунта связаны с микроразрушением структуры при сжатии и, следовательно, с изменением ее механических характеристик при деформации [2]. Отсюда следует, что модуль упругости, коэффициент Пуассона, вязкость и другие механические параметры являются переменными в процессе деформации грунта. Установлено [2], что модули деформации глинистых и лёссовых грунтов при статической и динамической деформации варьируются в зависимости от скорости деформации, состояния конструкции и уровня сжимающей нагрузки. В [3] на основании экспериментальных и теоретических исследований, а также наблюдательных обобщений показана процедура определения модуля деформации грунта фундамента различной площади. В [4] изучается взаимосвязь модуля деформации, когезии и угла внутреннего трения различных типов грунтов. Рассматриваются такие грунты, как песок различной зернистости, глины и суглинки. Все коэффициенты в формулах зависят от типа грунта. Полученные результаты упрощают оценку механических свойств несущей поверхности, так как становится возможным рассчитать параметры грунта, характеризующие сдвиговое сопротивление. В [5] анализируются различия в проведении испытаний на сжатие в соответствии с нормативными документами России и Германии и последующей обработке полученных данных. Различия модулей деформации были выявлены для различных типов грунта. В [6] рассматривается влияние грунта на характеристики деформации. Используется трехосное тестирование для измерения как уплотнения, так и сдвиговых деформаций грунта. Новое применение этого метода было осуществлено к грунтам из двух экспериментов: на глинистом суглинке и песчаном суглинке. В дополнение к трехосному тестированию было оценено физическое состояние грунта. Показано, что характеристики деформации более чувствительны к небольшим изменениям [6], что является потенциально мощным подходом для обнаружения или прогнозирования изменений в физических условиях грунта. В [7] описана схема обрушения массива грунта, приведены инженерно-геологические изыскания в карстовых регионах.

В [8] изложены результаты компьютерного моделирования грунтового основания и опирающегося на него здания и определены причины деформации и разрушения структурных единиц. В [9] указана важность измерений деформаций оснований зданий, даются рекомендации по изучению и определению возникающих деформаций в грунте. В [10] рассмотрены некоторые аспекты проектирования эффективных конструкций винтовых свай с учетом особенностей механического взаимодействия с грунтом, учета его свойств с использованием нелинейной упругопластической модели. В [11] установлено, что соотношения между модулями первичной нагрузки и разгрузки, принятые в практике проек-

тирования, были значительно недооценены, что привело к ошибке в определении прочности грунтов. В [11] была предложена новая методика определения модулей деформации. В [12] исследовано строительство дороги на мягком грунте и изучена ползучесть грунта, вызванная транспортными нагрузками. В [13] изучена нагрузка на ж/д насыпь.

По сравнению с непрерывной нагрузкой обнаружено, что прерывистая оказывает значительное влияние на деформационные характеристики грунта. В [14] разработан подход к оценке сейсмостойкости шельфовой зоны Северного Каспия. В [15] обсуждены диаграммы состояния, предложен метод расчета насыпной плотности суглинистых песчаных дерново-подзолистых грунтов. Установлено, что модель подходит для расчета насыпной плотности суглинка. Цель настоящей статьи – из экспериментальных диаграмм  $\sigma(\epsilon)$ , приведенных в [1], определить нелинейные функции  $E(\epsilon)$  при нагружениях.

## 2. Методы

Суглинок считается осадочной дисперсной горной породой, состоящей из глинистых, песчаных и пылеватых частиц. В зависимости от показателя текучести суглинка подразделяют на твердые, полутвердые, тугопластичные, мягкопластичные, текучепластичные и текучие. В зависимости от гранулометрического состава суглинка подразделяют на лёгкие песчанистые, лёгкие пылеватые, тяжёлые песчанистые, тяжёлые пылеватые.

Как известно, нелинейность зависимостей  $\sigma(\epsilon)$  тесно связана с изменением структуры грунта при сжатии. При деформировании грунта происходит его уплотнение, но так как грунт является неоднородной структурой, часто сильное влияние оказывают пористость грунта, твердые частицы, находящиеся в нем. Всё это вкуче представляет довольно сложный процесс деформирования образца грунта и определяет закономерности сжатия грунта. Очевидно, что при деформировании частично изменяется структура грунта, а это в свою очередь меняет физико-механические характеристики образца грунта. В процессе сжатия грунт испытывает одновременно упругие и пластические стадии деформирования, поэтому модуль упругости в дальнейшем назовем модулем деформации.

Из диаграммы  $\sigma(\epsilon)$  можно определить фактический модуль деформации  $E_f$  или секущий модуль деформации  $E$ . Значение секущего модуля деформации  $E$  определяется как  $E = \sigma/\epsilon$ , а фактического как  $E_f = \Delta\sigma/\Delta\epsilon$ . Из результатов обработки экспериментальных диаграмм видно, что изменения секущего модуля деформации происходят более равномерно и вполне поддаются анализу. В отличие от секущего фактический модуль деформации скачкообразен и трудно поддается анализу. Поэтому в текущей работе было принято решение анализировать и изучать только секущие модули деформации образцов суглинков.

## 3. Результаты и анализ

Для обработки результатов использованы экспериментальные диаграммы  $\sigma(\epsilon)$  из [1]. Рассмотрим рис. 1 (рис. 29, С.165 из [1]), где приведены диаграммы объемной деформируемости для испытаний образцов

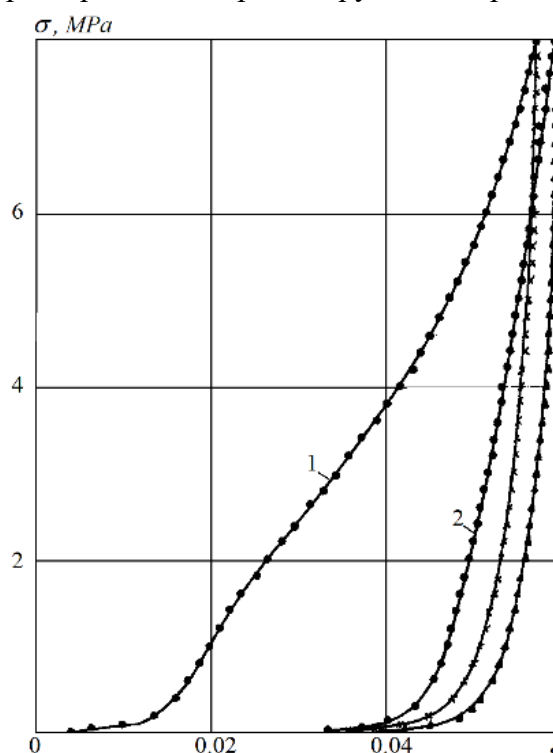


Рис.1. Экспериментальные диаграммы объемной деформируемости суглинка, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

суглинка. Проведение испытаний, подготовка к эксперименту здесь и далее подробно описаны в [1]. Здесь образцы имели следующие физико-механические характеристики:  $\rho=2.12 \text{ г/см}^3$ ,  $W=16.6 \%$ , где  $\rho$  – начальная плотность глины,  $W$  – весовая влажность.

На рис.1 мы видим две кривых – 1 и 2, где кривая 2 относится к повторному нагружению этого же образца суглинка. Изменения модулей деформации с ростом значения объемной деформации при нагружении, т.е. зависимости  $E(\epsilon)$  для кривых 1–2 (см. рис.1) приведены на рис.2. Как установлено, изменение модуля деформации в начале сжатия уменьшается, что хорошо видно по кривой 2 рис.2. На кривой 1 рис.2 это не настолько заметно, но тоже имеет место. Данное явление связано с разрушением структуры грунта в начале деформирования. Как видно из рис.2, этот процесс недолгий и за ним наступает резкий рост модуля деформации по мере того, как образец суглинка уплотняется: в случае с кривой 1 – до 150 МПа, а с кривой 2 – до 300 МПа. В случае с кривой 1 на рис. 2 после значения модуля деформации в районе 75 МПа наблюдается смена резкого роста  $E$  на более пологий, что представляет определенный интерес.

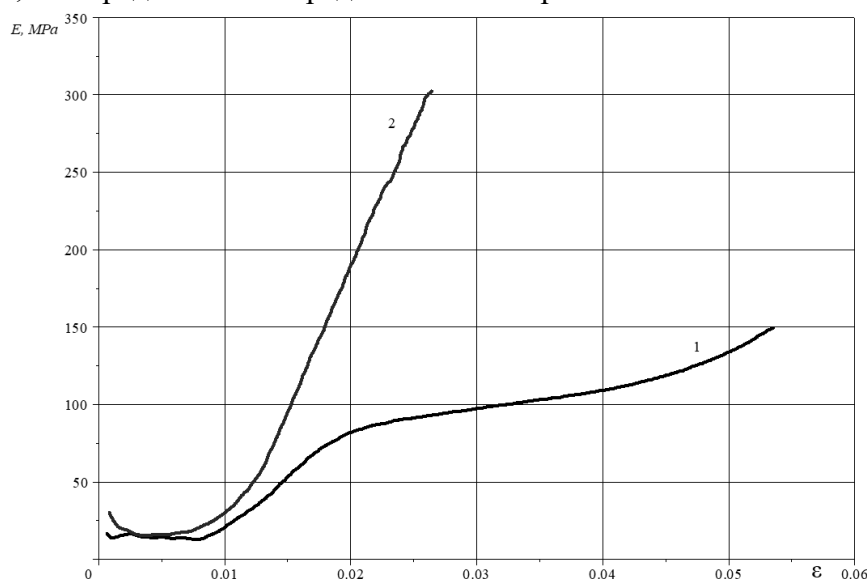


Рис.2. Изменение модулей деформации суглинка при нагружении, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка



Рис.3. Изменения фактического модуля деформации

На рис. 3 приведено изменение фактического модуля деформации  $E_f$  для кривой 1 рис.1. Как видно, изменение  $E_f$  происходит скачками и неустойчиво, но в целом представляет определенный интерес. В рамках этой работы изменение  $E_f$  рассматриваться не будет и для дальнейших диаграмм не будет приведено. Изучение  $E_f$  является предметом дальнейшей работы. Кроме того, в настоящей статье не будет затронута тема разгрузки кривых (данные по ним получены), представленных на диаграммах, что также является предметом дальнейших исследований.

Рассмотрим рис. 4 (рис. 30, с.166 из [1]). На нем приведены диаграммы объемной деформируемости для испытаний образцов суглинка со следующими параметрами:  $\rho=2.14 \text{ г/см}^3$ ,  $W=14.7 \%$ .

На рис.4 аналогично рис.1 мы наблюдаем два случая нагружения образца суглинка, с незначительной разницей в параметрах. Изменения модулей деформации с ростом значения объемной деформации при нагружении приведены на рис. 5. Как видно из рис. 5, изменение модуля деформации в начале сжатия уменьшается, что хорошо видно по обеим кривым. С 30–50 МПа идет уменьшение до 5–20 МПа, а затем наблюдается рост – в случае с кривой 1 более равномерный, а в случае с кривой 2 достаточно крутой рост. Это явление также, как и на рис.2, связано с разрушением структуры грунта в начале деформирования. Как видно из рис.5, у кривой 1 в районе примерно 60 МПа начинает наблюдаться более пологий участок, т.е. замедление роста  $E$  с продолжающейся увеличиваться деформацией. Это обстоятельство косвенно указывает на неоднородность образцов суглинка и разрушение пористой структуры в этой части образца суглинка. В случае с кривой 1 рост  $E$  доходит до 150 МПа, а с кривой 2 – до 300 МПа.

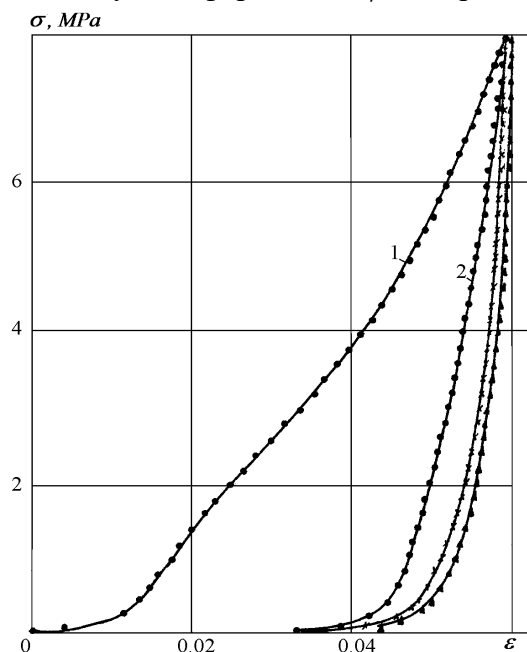


Рис.4. Экспериментальные диаграммы объемной деформируемости суглинка, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

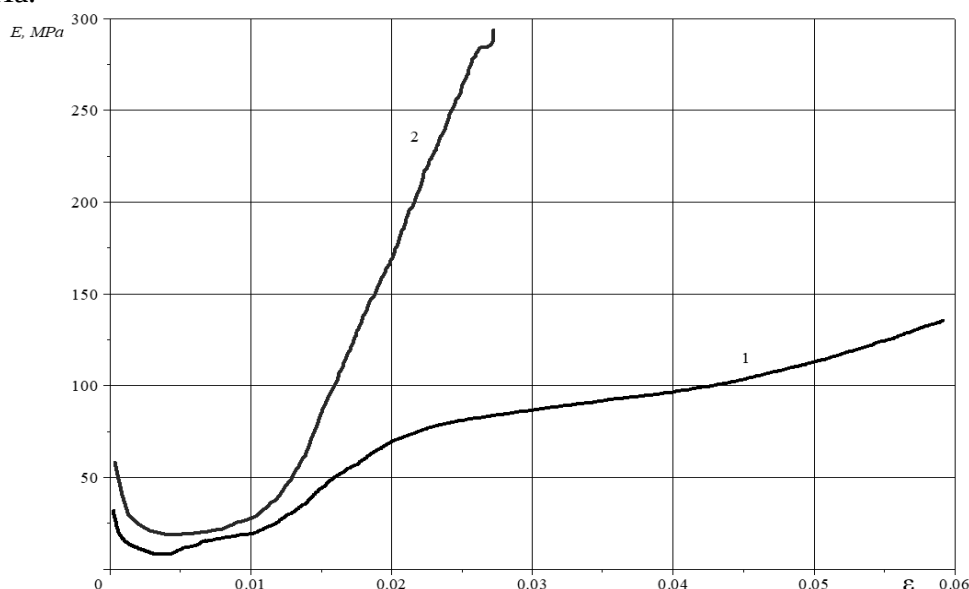


Рис.5. Изменение модулей деформации суглинка при нагружении, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

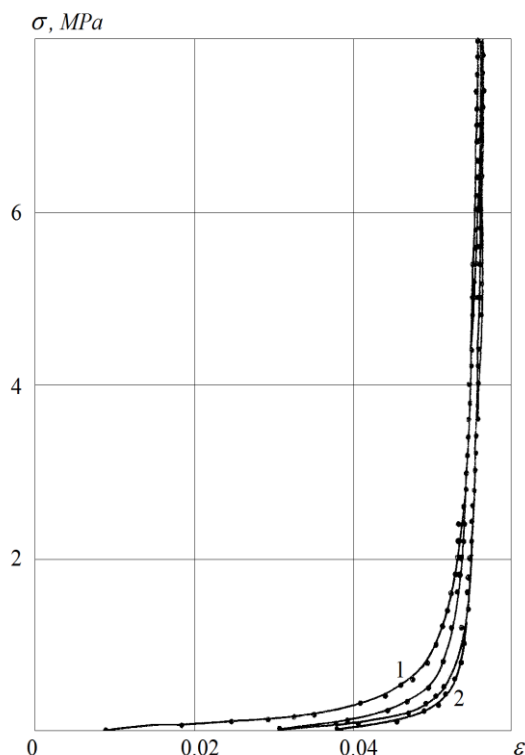


Рис.6. Экспериментальные диаграммы объемной деформируемости суглинка, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

Рассмотрим рис. 6 (фигура 31 с.167 из [1]). Здесь  $\rho=1.91 \text{ г/см}^3$ ,  $W=21.7\%$ . На рис. 6 мы видим также, как и в случае с рис. 1 и рис. 4, две кривых с участками нагрузки и разгрузки. Кривая 2 на рис. 6 является повторно нагружаемой. В отличие от рис. 1 и рис. 4 участок нагружения кривой 1 на рис. 6 менее выпуклый. Это связано с увеличением значения влажности и незначительным снижением плотности образца суглинка.

На рис.7 мы видим значения модуля деформаций для кривых 1 и 2 с рис. 6. Наблюдается вполне аналогичная картина для кривых 1 и 2 соответственно кривым 1 и 2 на рис.2 и рис.5. Сначала со значения в 40–80 МПа идет снижение значения модуля деформации, доходя до значения примерно в 10 МПа, а затем идет увеличение значения  $E$  до примерно 150 и 275 МПа соответственно кривым 1 и 2. Но на этом графике мы наблюдаем продолжительный участок с практически не изменяемым модулем деформации и растущей деформацией, особенно у кривой 1. Это, по-видимому, связано с естественной неоднородностью суглинка, так как в монолитах обнаруживались жесткие включения и

камни значительных размеров.

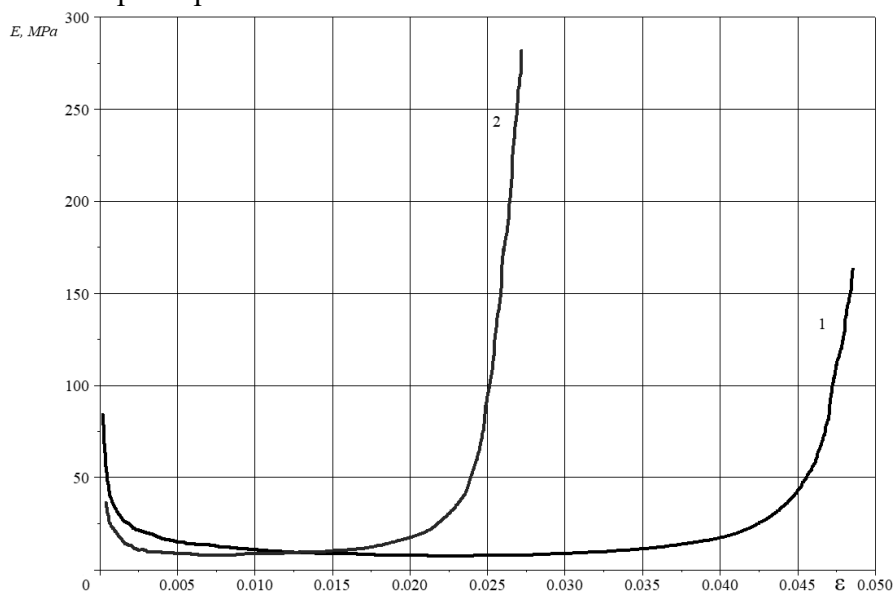


Рис.7. Изменение модулей деформации суглинка при нагружении, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

Рассмотрим рис. 8 (фигура 32, с.168 из [1]). Здесь  $\rho=2.11 \text{ г/см}^3$ ,  $W=20.7\%$ . На рис. 8 мы наблюдаем также, как и в предыдущих случаях, кривые 1 и 2 при нагружении и разгрузке. Максимальное значение  $\sigma$  равняется 8 МПа. На рис.9 представлено изменение модулей деформации суглинка при нагружении. Для кривой 1  $E$  доходит до 275 МПа, а

для кривой 2 больше 4450 МПа. Для кривой 1 на рис.9 мы наблюдаем вполне характерное изменение кривой – сначала уменьшение  $E$  с почти 100 МПа до 25 МПа, медленный рост, порой практически с неизменяемым  $E$  и резкий рост под конец деформирования. Кривая 2 на рис.9 ведет себя несколько по-иному. При повторном нагружении образца суглинка в данном случае характерный начальный участок отличается от предыдущих образцов – да, есть небольшое падение  $E$  в значениях, близких к 4–5 МПа, но затем идет постоянный и достаточно резкий рост  $E$ , особенно после достижения модулем деформации значения в 100 МПа. Это обстоятельство, очевидно, вызвано тем, что структура грунта стала достаточно однородной, в связи с чем прямолинейные участки изменения кривой практически отсутствуют. По сути это обстоятельство характерно для всех повторных нагружений в представленных опытах, но именно в этом образце суглинка оно проявляется наиболее характерно.

Рассмотрим рис. 10 (фигура 33, с.169 из [1]). Здесь  $\rho=2.07 \text{ г/см}^3$ ,  $W=21\%$ . В случае рис. 10 мы также имеем кривые 1 и 2, где кривая 2 является повторным нагружением образца суглинка. Максимальное значение  $\sigma$  равняется 8 МПа. На рис.11 мы наблюдаем аналогичную картину, что и в случае с предыдущими образцами суглинков. Кривая 1, начиная с 45 МПа, уменьшает значение модуля деформации до практически 10 МПа, а затем идет плавный рост и после достижения  $E$  значения в 60 МПа изменение кривой становится более крутым. Максимальное значение  $E$  кривой 1 на рис.11 достигает примерно 180 МПа. На кривой 2, рис.11 мы видим уменьшение значения  $E$  с почти 130 МПа до 25 МПа, участок со значениями  $\epsilon$  от 0.001 до 0.01, где значение  $E$  практически не изменяется и далее резкий рост значений модуля деформации до 430 МПа.

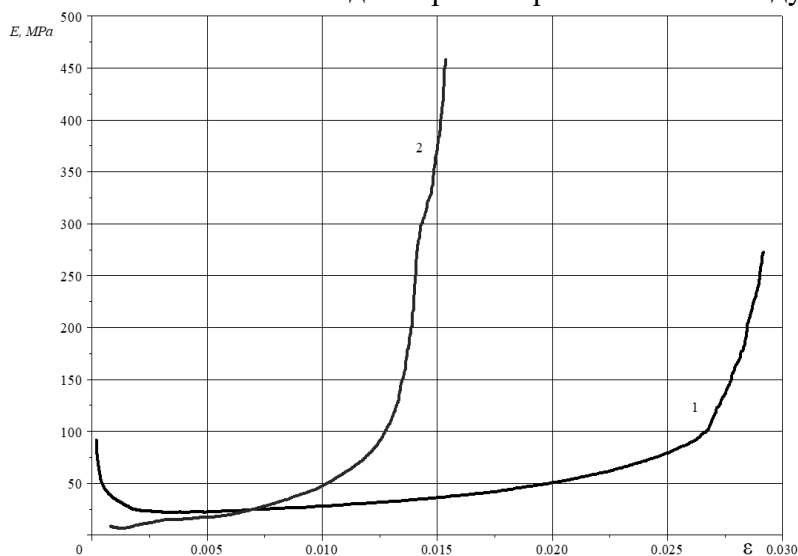


Рис.9. Изменение модулей деформации суглинка при нагружении, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

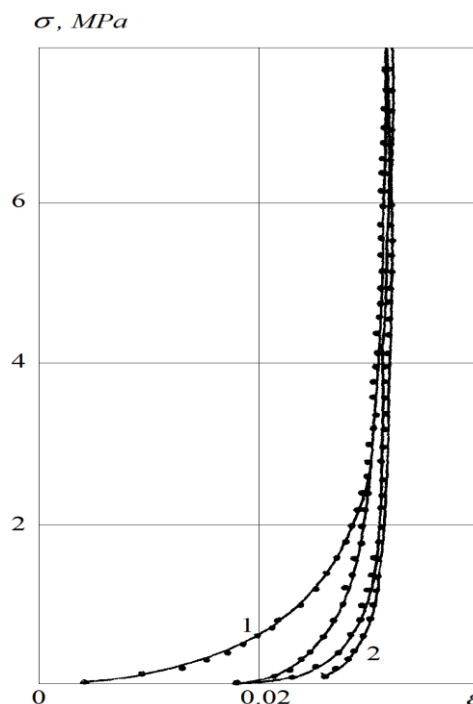


Рис.8. Экспериментальные диаграммы объемной деформируемости суглинка, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

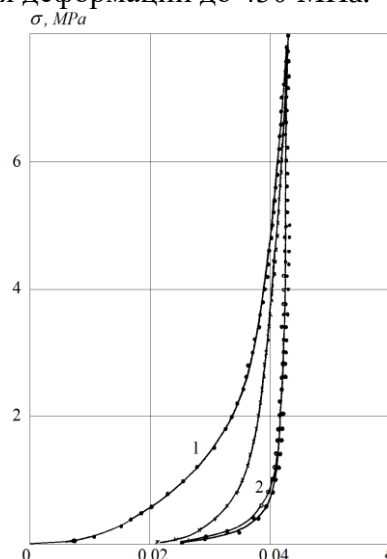


Рис.10. Экспериментальные диаграммы объемной деформируемости суглинка, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

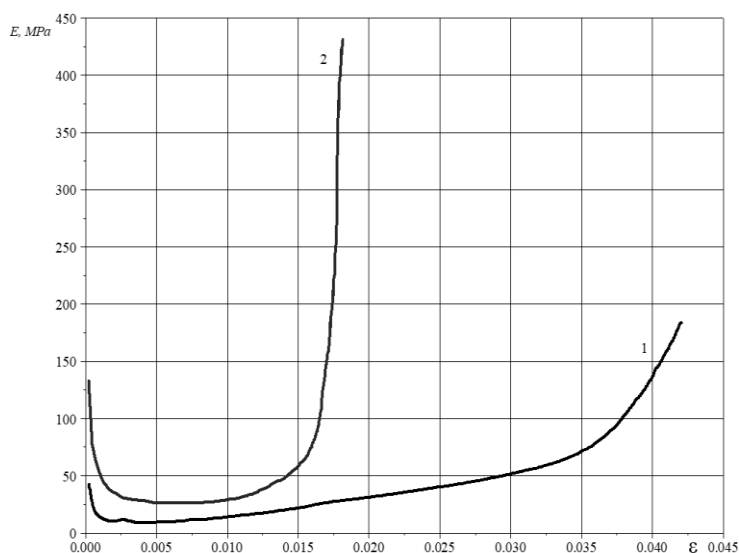


Рис.11. Изменение модулей деформации суглинка при нагружении, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

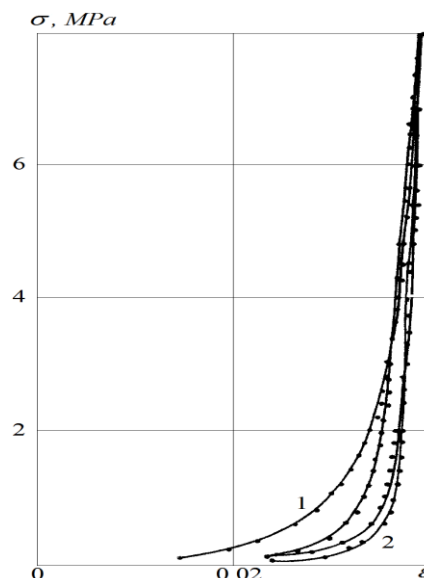


Рис.12. Экспериментальные диаграммы объемной деформируемости суглинка, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

Далее рассмотрим рис. 12 (фигура 34, с.170 из [1]). Здесь  $\rho=2.04 \text{ г/см}^3$ ,  $W=20 \%$ . На рис.12 наблюдаем кривые 1 и 2, где кривая 2 является повторным нагружением образца суглинка. Максимальное значение  $\sigma$  равняется 8 МПа. На рис. 13 мы наблюдаем уже характерную картину изменения модулей деформации суглинка при нагружении. В случае рис.13 обе кривые и 1 и 2 с примерно 800 МПа резко уменьшают значение  $E$  до примерно 50 МПа, затем идет деформация при этом значении до  $\epsilon \approx 0.01$ , а далее уже идет резкий рост. Кривая 1 достигает значения в более чем 300 МПа, а кривая 2 – под 500 МПа.

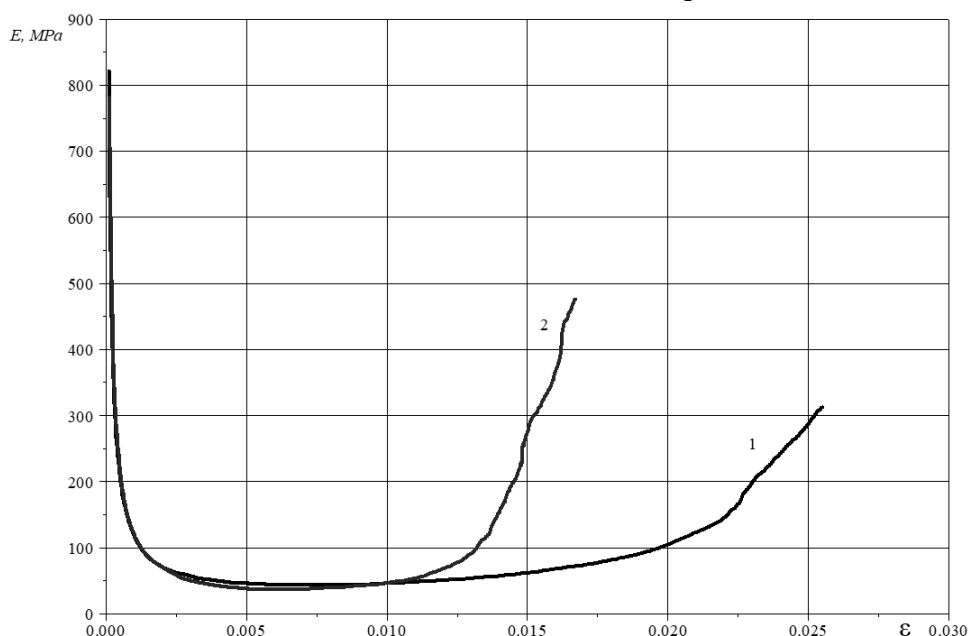


Рис.13. Изменение модулей деформации суглинка при нагружении, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

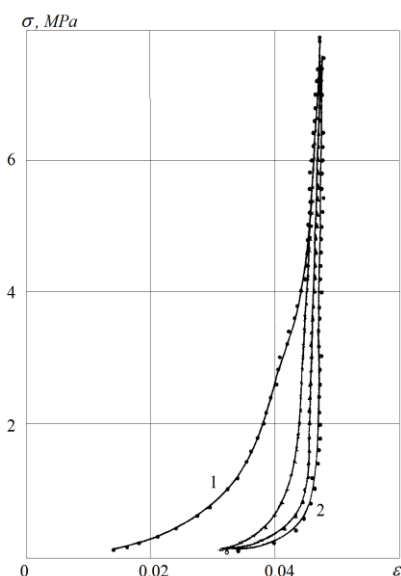


Рис.14. Экспериментальные диаграммы объемной деформируемости суглинка, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

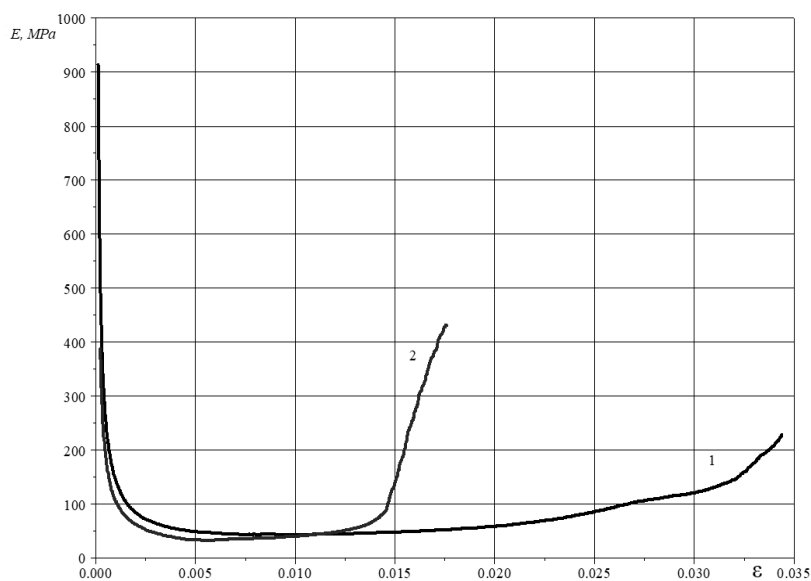


Рис.15. Изменение модулей деформации суглинка при нагружении, где кривой 1 соответствует первое нагружение, а кривой 2 – повторное нагружение этого же образца суглинка

Рассмотрим рис.14 (фигура 35, с.171 из [1]). Здесь  $\rho=2.03 \text{ г/см}^3$ ,  $W=13.2 \%$ . На рис.14 наблюдаем кривые 1 и 2, где кривая 2 является повторным нагружением образца суглинка. Максимальное значение  $\sigma$  также, как и во всех случаях, равняется 8 МПа. На рис.15 наблюдаем изменение модулей деформации, аналогичные предыдущим случаям. Кривая 1 начинает со значения  $E$  в более чем 900 МПа, резко падает до 15–20 МПа, далее следует вполне характерный участок медленного роста значения модуля деформации и максимум  $E$  в 210 МПа достигается при  $\varepsilon \approx 0.034$ . Можно отметить характерное для всех случаев меньшее значение  $\varepsilon$  при повторных нагружениях, т.е. для кривых 2 во всех случаях.

Далее приводим сводный график всех нагрузок для всех образцов. На графиках каждому образцу суглинка соответствует определенный цвет.

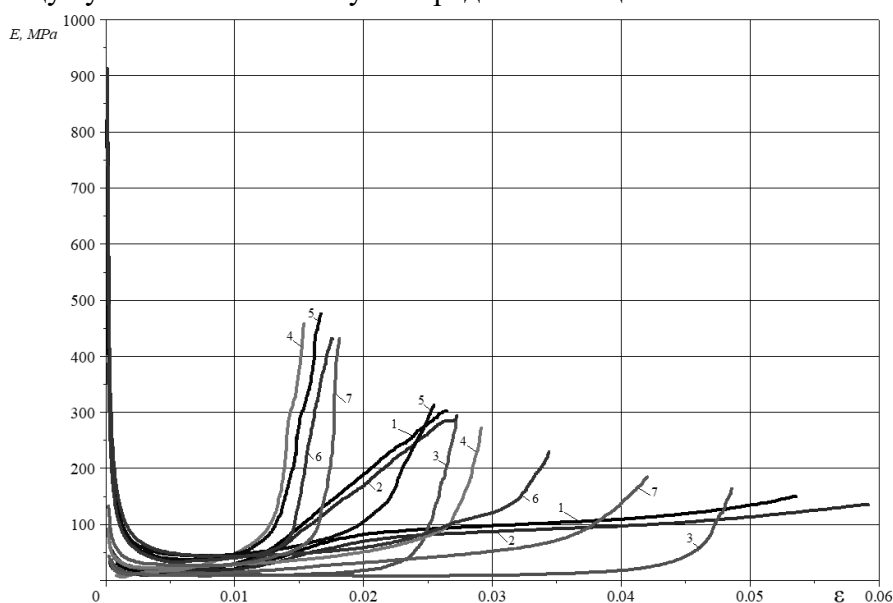


Рис.16. Сводный график нагрузок для всех образцов. Здесь 1 кривые соответствуют данным с рис.2, кривые 2 – рис.5, кривые 3 – рис.7, кривые 4 – рис.9, кривые 5 – рис.11, кривые 6 – рис.13, кривые 7 – рис.15

Благодаря рис.16 мы можем видеть, что для всех кривых характерно одинаковое изменение. Изменение кривых начинается с уменьшения значения  $E$ , достаточно резкого, затем идет деформация при небольшом росте  $E$ , а далее при достижении определенных значений резкий рост  $E$  во всех испытаниях.

#### 4. Обсуждение

Результаты испытаний образцов суглинка, вырезанных из одного и того же монолита, обнаруживают значительный разброс [1]. Это, видимо, связано с естественной неоднородностью суглинка (в монолитах обнаруживались жесткие включения и камни значительных размеров). Влияние начальной плотности суглинка на диаграмму объемной деформации установить не удалось из-за того, что количество опытов было небольшим (всего 7), а начальная плотность грунта в монолитах колебалась в узких пределах изменения естественной плотности.

Следует отметить некоторое влияние временных эффектов на объемную деформируемость суглинка. Это влияние, однако, было незначительным. Оно отсутствует при влажности 14–16 %, а при влажности 20 % наблюдается в диапазоне давлений  $p \leq 7$  кГ/см<sup>2</sup>. Это влияние проявляется в том, что при фиксированном давлении граница раздела жидкостей в трубке в течение некоторого времени медленно смещается на небольшую величину (порядка 2 мм) и затем ее положение стабилизируется [1].

В целом по результатам испытаний образцов суглинка можно сделать вывод, что для таких грунтов также применима предельная статическая модель грунта. Однако для получения окончательных данных для суглинков по объемной деформируемости нужно провести дополнительные опыты в большом числе по описанной схеме, с тем, чтобы исключить из результатов случайные влияния, связанные с неоднородностью суглинка, приводящей к большому разбросу в свойствах образцов.

Отметим, что изменение модулей деформации выше определены только на стадии нагружения грунта. Необходимо также определять изменения модулей деформации в стадии разгрузки, что является достаточно интересной и значимой темой для исследования. Приведенные результаты обработки экспериментальных данных для суглинков показывают, что при деформировании их модуль деформации меняется по схожему закону для всех образцов. Учет изменения модуля деформации существенно важен при проектировании зданий, сооружений, учету надежности и их сейсмостойкости.

#### 5. Заключение

Увеличение влажности приводит к сильному уменьшению необратимой деформации, которая локализуется в области малых давлений. Суглинки, как и пески, обладают нелинейной и необратимой при разгрузке объемной сжимаемостью. Многократные повторные нагружения и разгрузки не оказывают заметного влияния на диаграмму объемного деформирования. Тем не менее, при повторной нагрузке мы видим несколько иной характер модуля деформации. Влажность образца оказывает весьма существенное влияние на диаграмму, что можно наблюдать на рис.1–16. При увеличении влажности не только значительно растет деформация при малых давлениях и, наоборот, уменьшается при больших, но меняется и качественный вид диаграммы – при малой влажности диаграмма имеет участок, выпуклый в сторону оси напряжений, при большой – она всюду выпукла к оси деформаций. Для образцов с малой влажностью необратимость весьма значительна, разгрузочные ветви диаграммы идут очень круто к оси деформаций, однако, с ростом давления наблюдается тенденция к прекращению нарастания необратимой деформации. Аналитическое описание изменения модуля деформации приведет к созданию новых законов деформирования грунтов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григорян С.С. Исследования по механике грунтов: Дис. ... докт. техн. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1965. –620 с.

- [2] Sultanov K., Loginov P., Ismoilova, S., Salikhova, Z. Variable moduli of soil strain // E3S Web of Conferences. Vol. 97. 2019. P. 04013.
- [3] Samorodov A. V., Sedin V.L., Krotov O. V., Tabachnikov S. V. Procedure for Assigning a Soil Deformation Modulus of Large-Sized Slab and Slab-Pile Foundations Bases // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 56. 2019. No. 5. P. 340–345.
- [4] Khitrov E.G., Andronov A. V., Martynov B.G., Spiridonov S. V. Interrelations of various soil types mechanical properties // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1177. 2019. P. 012032.
- [5] Kalugina J.A., Keck D., Pronozin Y.A. Determination of soil deformation moduli after National Building Codes of Russia and Germany // Magazine of Civil Engineering. Vol. 75. 2017. No. 7. P. 139–149.
- [6] Chakraborty D., Watts C.W., Powlson D.S., Macdonald A.J., Ashton R.W., White R.P., Whalley W.R. Triaxial Testing to Determine the Effect of Soil Type and Organic Carbon Content on Soil Consolidation and Shear Deformation Characteristics // Soil Science Society of America Journal. Vol. 78. 2014. No. 4. P. 1192–1200.
- [7] Sheinin V.I. Use of Ground Surface Caving Model to Predict Karst Cavity Effect on Soil Mass Deformation // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 54. 2017. No. 4. P. 231–238.
- [8] Grigor'ev Y.S., Fateev V. V. Reasons for Deformation and Failure of the Structural Units of an Apartment Building on a Slopeside Site // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 54. 2017. No. 5. P. 318–323.
- [9] Il'ichev V.A., Nikiforova N.S. Methods for the Determination of Curvatures and the Difference Between the Slopes of Foundations as the Criteria of Deformation of the Basements of Buildings and Structures // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 55. 2018. No. 3. P. 168–172.
- [10] Alekseev A.G., Bezvolev S.G., Sazonov P.M. Experience of Using Multi-Blade Screw Piles in Silt-Loam Soil Foundation // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 55. 2019. No. 6. P. 387–393.
- [11] Bershov A. V., Mirny A.Y., Usov A.N. Determination of the Unloading Modulus of Deformation in Dispersive Soils and Its Accounting in Designing//Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol.57. 2020. №1. P. 1–7.
- [12] Cai Y., Chen Y., Cao Z., Ren C. A combined method to predict the long-term settlements of roads on soft soil under cyclic traffic loadings // Acta Geotechnica. Vol. 13. 2018. No. 5. P. 1215–1226.
- [13] Nie R., Li Y., Leng W., Mei H., Dong J., Chen, X. Deformation characteristics of fine-grained soil under cyclic loading with intermittence // Acta Geotechnica. Vol. 15. 2020. P. 3041–3054.
- [14] Kutergin V.N., Sevost'yanov V. V., Pankov K. V., Kal'bergenov R.G., Grigor'eva L. V. Basic Aspects of a Methodological Approach to Assessing the Seismic Resistance of Soils // Water Resources. Vol. 44. 2017. No. 7. P. 968–977.
- [15] Moiseev K.G. Calculating the density of loamy sandy soddy-podzolic soils from penetration resistance diagrams // Eurasian Soil Science. Vol. 46. 2013. No. 10. P. 1026–1031.

Дата поступления  
25.05.2021

**Логинов П.В. Қўмли тупроқларни ўзгаришчан деформация модуллари ва уларни аниқлаш.**

**Аннотация:** Илмий адабиётларда мавжуд бўлган экспериментал диаграммалар асосида қўмли тупроқлар учун кучланиш ва деформация компонентлари ўртасида юмшоқ тупроқларнинг эластик ва пластик деформацияси чегарасининг боғлиқлиги аниқланди. Турли зичлик ва намликка эга бўлган қўмли тупроқлар намуналарининг деформация модулидаги ўзгаришлар аниқланди. Деформация пайтида қўмли тупроқларнинг деформация модули чизиқсиз равишда ўзгариши аниқланди. Ушбу ўзгаришларни тупроқ деформацияси қонунларида ҳисобга олиш таклиф этилади.

**Калит сўзлар:** тупроқ; қўмли тупроқни сиқиш диаграммаси; деформация модули.

**Loginov P.V. Variable modules of loamy soil deformation and their definition.**

**Abstract:** On the basis of experimental diagrams between the stress and strain components for loamy soils found in scientific literature, the dependences of the boundary of elastic and plastic strains in soft soils are determined. Modified strain modulus of loamy soil samples with different densities and moisture content were determined. It was established that the strain moduli of loamy soils change nonlinearly under strain. It was proposed to take into account these changes in the laws of soil strain.

**Keywords:** soil; loamy soil compression diagrams; strain modulus.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СОСТАВНЫХ ТРУБЧАТЫХ СТЕРЖНЯХ

Акбаров Н.А.<sup>1</sup>, Хамидов С.С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: nodirbek0086@mail.ru

**Аннотация:** Приведены постановки двух связанных нестационарных волновых задач для составных вязкоупругих стержней, взаимодействующих по законам типа Кельвина-Фойгта и Кулона. В качестве закона деформирования стержней принята модель стандартно-линейного тела, которая, в частности, переходит в закон Гука. Полученные дифференциальные уравнения в частных производных гиперболического типа решаются численно с использованием метода характеристик и методом конечных разностей (МКР) по неявной схеме. Применение МКР к характеристическим соотношениям повышает точность численного решения, так как они являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Алгоритм решения разработан для двух характеристических плоскостей с соблюдением условия устойчивости Куранта. Проанализированы полученные численные результаты.

**Ключевые слова:** волны; стержень; обойма; метод характеристик; метод конечных разностей; алгоритм; численные решения.

## 1. Введение

Сопоставление результатов экспериментов [1–3] с аналитическим и численным решением задачи о распространении волны в упругом стержне с внешним трением дает высокую точность совпадения. Используя метод численной реализации алгоритма решения задачи о распространении ударной волны в стержне с внешним трением [3–7], рассмотрим задачу о распространении ударной волны в составных стержнях. Аналитическое решение задачи о распространении ударной волны в прижатых один к другому упругих стержнях, взаимодействующих по закону Кулона, приведено в [2].

## 2. Постановка задачи

Полубесконечный стержень длиной  $l$ , начальное сечение которого соответствует началу координат  $x=0$  в плоскости  $x, t$ , где  $x$  – пространственная координата,  $t$  – время, имеет обжатый обоймой (трубчатый стержень) участок от  $x_1$  до  $x_2$ .

В сечении  $x=0$  стержня действует ударная нагрузка четырехугольной формы

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_{\max}, & 0 \leq t \leq \theta, \\ \sigma &= 0, & t > \theta,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\sigma$  – продольное напряжение;  $\sigma_{\max}$  – максимальное напряжение;  $\theta$  – время действия нагрузки.

Уравнения состояния стержня и обоймы приняты линейно-вязкоупругими (стандартно-линейное тело):

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_i}{dt} + \mu_i \varepsilon_i &= \frac{d\sigma_i}{E_{Di} dt} + \mu_i \frac{\sigma_i}{E_{Si}}, \\ \mu_i &= E_{Di} E_{Si} / (E_{Di} - E_{Si}) \eta_i,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\varepsilon$  – продольная деформация;  $E_D, E_S$  – модули упругости материала стержня при  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt \rightarrow \infty$  и 0 соответственно;  $\eta$  – коэффициент объемной вязкости;  $\mu$  – параметр вязкости.

Здесь и далее  $i=1, 2$ . При  $i=1$  значения параметров относятся к стержню, а при  $i=2$  – к обойме.

Волновая картина задачи приведена на рис.1. В этом случае скорость распространения волн в обойме  $c_{02}$  меньше, чем скорость распространения волн в стержне  $c_{01}$ . Когда

нагрузка не действует на передний торец обоймы и обойма приводится в движение только силами трения, линия  $F_2$  является линией слабого разрыва. В случае совпадения переднего торца обоймы с начальным сечением стержня  $x=0$  возможен вариант, когда на передний торец обоймы также действует нагрузка.

В этом случае точка  $A$  (см. рис.1) совпадает с началом координат и линия  $F_2$ , также как линия  $F_1$ , является линией разрыва первого рода, и параметры волны на границе областей 3, 4 меняются скачком. При  $t=t_3$  и  $t=t_4$  фронты волн  $F_1, F_2$ , достигают задней границы участка с трением и заднего торца обоймы соответственно. Фронты волн  $F_1$  и  $F_2$ , отражаясь от границы  $x=x_2$ , образуют области 10, 11. Проходящие по стержню волны при  $x>x_2$  образуют области 5, 12. Далее, в результате многократных отражений и преломлений фронтов волн при  $t=t_2, t=t_5, t=t_6$  и т.д. образуются области 6 – 21.

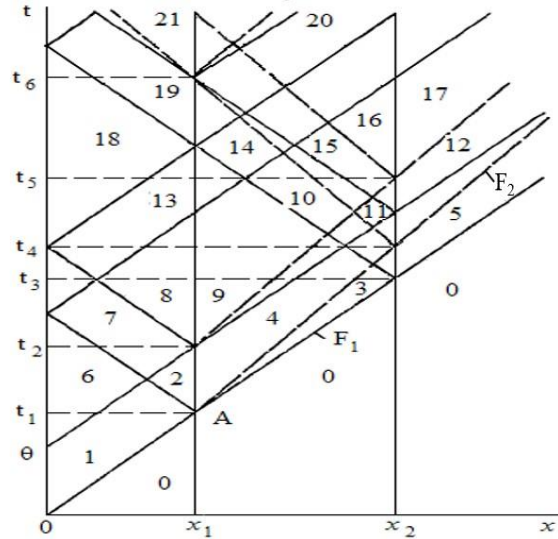


Рис.1. Схема расчёта процесса распространения волны в стержне с внешней обоймой

Все фронты волн, кроме  $F_1$ , являются линиями слабого разрыва, что существенно облегчает решение задачи. В случае, когда  $F_2$  также является линией сильного разрыва, задача существенно усложняется.

Уравнения движения стержня и обоймы с учетом силы трения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{0i} \partial \vartheta_i / \partial t - \partial \sigma_i / \partial x + \chi_i \sigma_{\pi} &= 0, \\ \partial \vartheta_i / \partial x - \partial \varepsilon_i / \partial t &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vartheta_i$  – скорость частиц (массовая скорость) стержня и обоймы;  $\rho_{0i}$  – начальная плотность стержня и обоймы;  $\chi_1 = \text{sign}(\vartheta)$  – для стержня,  $\chi_2 = -\text{sign}(\vartheta)$  – для обоймы;  $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$  – относительная скорость;  $\sigma_{\pi}$  – приведенная сила трения, действующая на единицу длины стержня.

Значения  $\sigma_{\pi}$  для стержня и обоймы определяются из соотношения

$$\sigma_{\pi} = 4D_{Hi}\tau / (D_{Hi}^2 - D_{Bi}^2), \quad (4)$$

где  $\tau$  – сила трения (касательное напряжение), действующая между стержнем и обоймой;  $D_{Hi}$  – внешние диаметры стержня и обоймы;  $D_{Bi}$  – внутренние диаметры трубчатого стержня и обоймы.

Решение задачи сводится к интегрированию системы (3), с замыкаемой уравнением (2) отдельно для стержня ( $i=1$ ) и отдельно для обоймы ( $i=2$ ). Эта система связана условиями на поверхности контакта стержня и обоймы, определяющими законы изменения силы трения.

Граничные условия: в начальном сечении стержня выполняется (1); в начальном сечении обоймы  $\sigma_2=0$ ; на фронте волны  $F_1$  (см.рис.1), где не проявляются вязкие свойства среды:

$$\sigma_1 = -c_{01}\rho_{01}\mathcal{Q}_1; \quad \mathcal{Q}_1 = -c_{01}\varepsilon_1; \quad c_{01} = (E_{D1}/\rho_{01})^{1/2}, \quad (5)$$

и на фронте F<sub>2</sub>:

$$\sigma_2 = -c_{02}\rho_{02}\mathcal{Q}_2; \quad \mathcal{Q}_2 = -c_{02}\varepsilon_2; \quad c_{02} = (E_{D2}/\rho_{02})^{1/2}, \quad (6)$$

где  $c_{0i}$  – скорости начала возмущений (фронта), определяемые динамическими диаграммами сжатия.

Система уравнений (3), замыкаемая уравнением (2), есть система уравнений гиперболического типа, характеристические линии и соотношения которой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_i - c_{0i}\rho_{0i}\partial\mathcal{Q}_i &= -c_{0i}^2\rho_{0i}g_i(\sigma_i, \varepsilon_i)\partial t + \chi_i c_{0i}\sigma_{\bar{a}}\partial t \quad \text{при } \partial x/\partial t = +c_{0i}, \\ \partial\sigma_i - c_{0i}\rho_{0i}\partial\mathcal{Q}_i &= -c_{0i}^2\rho_{0i}g_i(\sigma_i, \varepsilon_i)\partial t + \chi_i c_{0i}\sigma_{\bar{a}}\partial t \quad \text{при } \partial x/\partial t = -c_{0i}, \\ \partial\sigma_i - c_{0i}^2\rho_{0i}\partial\varepsilon_i &= -c_{0i}^2\rho_{0i}g_i(\sigma_i, \varepsilon_i)\partial t \quad \text{при } \partial x/\partial t = 0, \\ g_i(\sigma_i, \varepsilon_i) &= \sigma_i/\eta_i - E_{Di}E_{Si}(\varepsilon_i - \sigma_i/E_{Di})/(E_{Di} - E_{Si})\eta_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Системы уравнений (7) для стержня и обоймы решаются отдельно. Однако эти системы связаны значениями силы трения  $\tau$ , действующей на поверхности их контакта. Рассмотрим закон изменения силы трения на поверхности контакта стержня и обоймы.

Примем закон изменения касательного напряжения (трение) между обоймой и стержнем в виде закона Кельвина-Фойгта:

$$\begin{aligned} \tau &= K_x(\sigma_N)|u| + \eta_s(\sigma_N)|\partial u/\partial t| \quad \text{при } 0 \leq |u| \leq u_*, \\ \tau &= \tau_s = f_u\sigma_N \quad \text{при } |u| > u_*. \end{aligned} \quad (8)$$

где  $K_x(\sigma_N) = K_N(\sigma_N)$ ;  $K_x$  – функция взаимодействия;  $K_N$  – коэффициент жёсткости контакта стержня с обоймой;  $\sigma_N$  – нормальное к поверхности контакта давление (прижимающая сила);  $\eta_s$  – коэффициент сдвиговой вязкости менее прочного материала из контактирующих тел;  $u$  – относительное смещение;  $\partial u/\partial t$  – относительная скорость;  $f_u$  – коэффициент трения между стержнем и обоймой;  $\tau_s$  – предельное значение силы трения (Кулоново трение);  $u_*$  – значение относительного смещения, при котором происходит переход от одной стадии взаимодействия к другой.

Значения параметров модели взаимодействия  $K_N$ ,  $\eta_s$  и  $f_u$  должны определяться из эксперимента. Из (8) при  $u = u_*$  получим

$$u_* = f_u \left( 1 - \frac{\partial u}{c_s \partial t} \right) / K_N, \quad (9)$$

где  $c_s$  – скорость поперечных волн в менее прочном материале контактирующих тел. Здесь предполагается  $\eta_s = \tau_s/c_s$ .

Из (9) видно, что при  $\partial u/\partial t \geq c_s$ ,  $u_* = 0$ , т.е. при скоростях взаимодействия, равных или больше скорости поперечных волн в одном из контактирующих тел, согласно (9), из (8) получим закон Кулона. При  $u_* \rightarrow \infty$  и  $\eta_s = 0$  имеет место закон взаимодействия Винклера-Винклера.

Принятый здесь закон взаимодействия (8), таким образом, учитывает зависимость силы трения от скорости взаимодействия.

### 3. Результаты расчетов и их анализ

Для проведения расчётов на ЭВМ приняты в качестве исходных данных характеристики трубчатого стержня, на которых проводились опыты [1]. Наружный диаметр обоймы, согласно [1],  $D_{H2} = 0.028$  м, а  $D_{B2} = 0.0127$  м. Механические характеристики обоймы такие же как у стержня. Параметры нагрузки, создающей волну, значение прижимающего давления, расположение обоймы такие же, как в опыте [1]. Значения  $f_u = 0.425$ ,  $u_* = 5 \cdot 10^{-6}$  м, а значение  $\partial u/\partial t$  определяется по ходу решения задачи.

Рассмотрим случай, когда в начальном сечении  $x=0$  на стержень и обойму действует нагрузка, заданная формулой (1). В этом случае по прижатым один к другому стержням начинают распространяться ударные волны. Фронты волн  $F_1$  и  $F_2$  (см. рис.1), т.е. передние фронты волн, как в стержне, так и в обойме являются линиями сильного разрыва. Причём, в зависимости от соотношений скоростей волн в стержне и обойме в одном из них волна распространяется в возмущённой среде. Тогда соотношения на этом фронте имеют вид

$$\sigma_i - \sigma_{i0} = -c_{i0}\rho_{i0}(\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_{i0}), \quad (10)$$

где  $\sigma_{i0}$ ,  $\mathcal{G}_{i0}$  – напряжение и скорости частиц перед фронтом волны в момент его прихода к данному сечению стержня или обоймы.

Расчёты на ЭВМ проводились при следующих исходных значениях параметров:  $\sigma_{max}=100$  МПа;  $\theta=0.0001$  с;  $\sigma_N=1$  МПа;  $u_*=5\cdot 10^{-6}$  м;  $f_u=0.425$ ;  $\eta_s=10^5$  Нс/м<sup>3</sup>;  $D_{H1}=0.0127$  м;  $D_{B1}=0.007$  м;  $D_{H2}=0.028$  м;  $D_{B2}=0.0127$  м;  $\mu_i=10^4$  с<sup>-1</sup>;  $c_{01}=6000$  м/с;  $c_{02}=5000$  м/с;  $\rho_{01}=\rho_{02}=7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $\gamma=E_{Di}/E_{Si}=1.02$ . Длины стержня и обоймы в расчётах взяты таким образом, чтобы не возникала отражённая от второго конца волна.

Переходим к рассмотрению результатов расчётов на ЭВМ, полученных для упругих стержней ( $\gamma_1=1.02$ ).

На рис.2 приведено изменение напряжения по времени в сечениях стержня при  $x=0$ ; 0.4; 1.2; 2 и 2.4 м (соответственно, кривые 0–4). В начальном сечении стержня и обоймы ( $x=0$ ) действует прямоугольный импульс (кривая 0). Учёт в законе трения (8) вязкого сопротивления  $\eta_s \neq 0$  приводит к размыванию скачка (отмечено кружочками на кривой 1) напряжения на фронте волны (кривые 1–4). Ударная волна с увеличением расстояния от начального сечения превращается в непрерывную волну сжатия. При  $x=0.4$  м значение скачка на фронте уменьшается на ~40%, а при  $x=0.2$  м скачок уже отсутствует. Характерным для зависимостей  $\sigma(t)$  в стержне, в случае действия нагрузки (1) на оба стержня, является увеличение амплитуды напряжения с расстоянием (кривые 1–4). В сечениях обоймы, наоборот, значение амплитуды напряжения с увеличением расстояния уменьшается. Это происходит в случае  $c_{01} > c_{02}$ , т.е. когда скорость распространения волны в стержне больше, чем в обойме. В этом случае наблюдается как бы “отток” энергии от стержня, где скорость распространения волны меньше, в стержень, где скорость распространения больше. Однако рост амплитуды волны в стержне наблюдается в расстояниях, когда волны по длине стержня и обоймы покрывают друг друга. После расхождения волн в стержнях, т.е. когда в одном из стержней волна “оторвется” от волны в другом стержне, увеличение амплитуды напряжения прекращается, и она начинает уменьшаться. Далее возмущённая часть стержня взаимодействует с частью обоймы, вовлекая её в движение, также как возмущённая часть обоймы вовлекает в движение невозмущённую часть стержня, взаимодействующего с ней.

Длина начального участка стержня, в котором происходит увеличение амплитуды напряжения, определяется по формуле в случае  $c_{01} > c_{02}$

$$x_* = \frac{c_{01}^2 \theta}{c_{01} - c_{02}}. \quad (11)$$

В случае  $c_{02} > c_{01}$

$$x_* = \frac{c_{01}^2 \theta}{c_{02} - c_{01}}. \quad (12)$$

Из (11), (12) видно, что в случае  $c_1 > c_2$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Результаты расчётов показали, что в этом случае прямоугольный импульс по обоим стержням распространяется без затухания.

Влияние изменения свойств материала стержня и обоймы на параметры волны рассмотрено на примере расчётов на ЭВМ различных вариантов, приведённых на рис.3. Кривые 1 относятся к сечению стержня  $x=0.4$  м, а кривые 3 – к сечению стержня  $x=2$  м.

Здесь сплошные кривые (изменение напряжения по времени) соответствуют кривым 1 и 3 на рис.2.

В случае уменьшения жёсткости связи между частицами стержня и обоймы на поверхности их контакта, т.е. при  $K_N=1$ , максимальные значения напряжения значительно уменьшаются (кривые *a*). Амплитуды вторичных импульсов, при этом также уменьшаются.

Учёт вязких свойств стержня ( $\gamma_1=2$ ,  $\gamma_2=1$ ) также приводит к уменьшению максимальных значений напряжения с увеличением  $x$  (кривые *b*), а в случае, когда обойма и стержень обладают вязкими свойствами ( $\gamma_1=2$ ,  $\gamma_2=2$ ), при  $x = 2$  м напряжение в стержне убывает более чем в два раза (кривые *c*).

Учёт вязких свойств стержня и обоймы ( $\gamma_1=\gamma_2=2$ ) приводит к изменению профиля волны в сечениях стержня и обоймы и более интенсивному затуханию параметров волны как в обойме, так и в стержне.

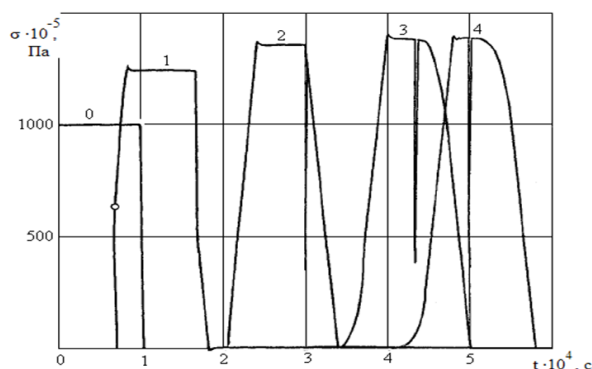


Рис.2. Зависимости напряжения от времени в стержне

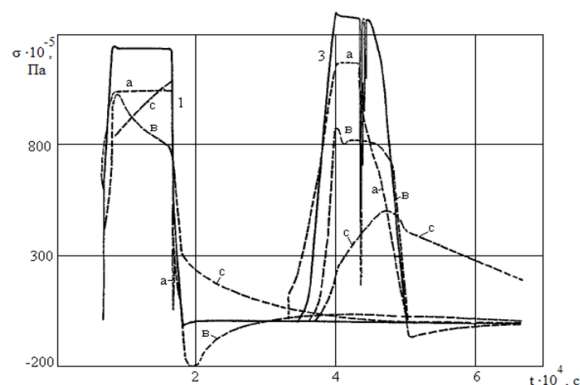


Рис.3. Зависимости напряжений в сечениях стержня от времени в случае вязкоупругих стержней

Таким образом, при распространении ударных волн в стержне и обойме или в составных стержнях, наблюдаются такие качественные результаты, как увеличение амплитуды напряжения и времени действия волны в стержне при  $C_{01} > C_{02}$ .

#### 4. Заключение

1. Разработаны алгоритм и программа решения нестационарных связанных волновых задач для двух стержней (стержень и обойма). Алгоритм составлен с использованием двух характеристических плоскостей дискретизации, с одинаковым шагом по времени и различными шагами по пространственной координате.

2. При расчетах параметров волн на характеристических плоскостях численные расчеты проводятся параллельно с соблюдением условия устойчивости Куранта.

3. Полученные численные результаты показывают, что при одинаковой длине стержня и обоймы происходит «отток» энергии от менее жесткого стержня к более жесткому. Такой эффект в численных расчетах получен впервые.

4. Применение теории характеристик, с помощью которой уравнения в частных производных приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также использование неявной схемы в МКР позволяют избежать в составлении алгоритма псевдовязких членов, что очень важно при интерпретации и анализе полученных численных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Викторов В.В., Караваев Р.Р., Никитин Л.В., Хамраев А.Х. Экспериментальная проверка закона сухого трения при распространении волн в обжатом стержне // Известия АН СССР Механика твердого тела. М.: 1988. №3. С.165–171.

- [2] Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним трением. М.: 1998. –272 с.
- [3] Султанов К.С. Численное решение задачи о распространении волн в вязкоупругом стержне с внешним трением. Известия АН СССР Механика твердого тела. М.: 1991. №6. С. 92–101.
- [4] Кужуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред. М.: 2008. –320 с.
- [5] Хоскин Н.Э. Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения // «Вычислительные методы в гидродинамике». М.: Мир. 1967. С. 264–291.
- [6] Султанов К.С. Волны в обжатом стержне при движении обжимающего тела. Известия РАН. Механика твердого тела. М.: 1995. №5. С.123–133.
- [7] Sultanov K.S., Vatin N.I. Wave Theory of Seismic Resistance of Underground Pipelines // Appl. Sci. 2021. №11. P.1797.

Дата поступления  
21.05.2021

**Акбаров Н.А., Хамидов С.С. Таркибли қувурсимон стерженларда ночизикли тўлқин жараёнларини сонли моделлаштириши.**

**Аннотация:** Кельвин-Фойгт ва Кулон қонунлари бўйича ўзаро таъсирлашувчи мураккаб эластик қовушқоқ стержен учун иккита боғлиқ ностационар тўлқин масалаларининг қўйилиши келтирилган. Стерженнинг деформацияланиш қонуни сифатида хусусий ҳолда Гук қонунига ўтувчи, стандарт-чизикли жисм модели қабул қилинган. Олинган гиперболик типдаги хусусий ҳосилалар дифференциал тенглама характеристикалар усули ва чекли айирмалар усули ошкормас схемаси бўйича ечилган. Характеристика боғлиқликларига чекли айирмалар усулини қўлланилиши сонли ечимнинг аниқлигини оширади, шунингдек улар оддий дифференциал тенгламалар ҳисобланади. Ечиш алгоритми иккита характеристик текислик учун Курант устуворлик шартини бажарган ҳолда ишлаб чиқилган. Олинган сонли натижалар таҳлил қилинган.

**Калим сўзлар:** тўлқинлар; стержен; ҳалқа; характеристикалар усули; чекли айирмалар усули; алгоритм; сонли ечимлар.

**Akbarov N.A., Khamidov S.S. Numerical simulation of nonlinear wave processes in compound tubular rods.**

**Abstract:** The formulations of two coupled non-stationary wave problems are given for composite viscoelastic rods interacting according to the Kelvin-Voigt and Coulomb type laws. The model of a standard-linear body is adopted as the law of rod strain, which, in particular, passes to the Hooke law. The obtained differential equations in partial derivatives of hyperbolic type are solved numerically using the theory of characteristics and the finite differences method (FDM) in an implicit scheme. The application of the FDM to the characteristic relations increases the accuracy of the numerical solution since they are ordinary differential equations. The solution algorithm was developed for two characteristic planes, meeting the Courant stability condition. The numerical results obtained are analyzed.

**Keywords:** waves; rod; case; method of characteristics; finite differences method; algorithm; numerical solution.

## МУНДАРИЖА

|                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. Абдусаттаров, А.И. Исомиддинов, Н.Б. Рузиева. Такрорий юкланишлар таъсиридаги юпқа деворли эластик-пластик стерженларни емирилишни ҳисобга олган ҳолда ҳисоблаш .....                                                                         | 3   |
| А.Т. Буриев. Мустаҳкам асосли грунтли тўғонларнинг ностационар тебраниши.....                                                                                                                                                                    | 17  |
| А. Абдурахимов, Д. Холиков. Гетроген суюқлик қатлами бўлган кимёвий реакторнинг ишлаш режимини ўрганиш.....                                                                                                                                      | 27  |
| Б.М. Мардонов. Силжишдаги тебранишларда қувурнинг сувга тўйинган грунт билан ўзаро таъсир кучи параметрларини аниқлаш.....                                                                                                                       | 32  |
| Х.С. Сагдиев, А.С. Ювмитов, З.Р. Тешабоев, В.А. Галиаскаров, Х.О.Шерниёзов, Б.Н.Мирзакабилов, З.Ж. Собиров. Тошкент шаҳридаги мактабгача таълим муассасалари биноларини сейсмик хавфсизлиги ва улардан келгусида фойдаланиш бўйича тавсиялар.... | 39  |
| Б.М. Мардонов, Х.А. Байбулатов, М.Ж. Бердибаев. Таянчларнинг грунт билан ўзаро таъсирини ҳисобга олган ҳолда сейсмик юklar таъсиридаги тўсинли автойўл кўприкларини ҳисоблаш.....                                                                | 54  |
| Г.А. Бахадиров, Г.Н.Цой. Кўп қатламли намланган кўн ярим маҳсулотларга механик ишлов бериш.....                                                                                                                                                  | 64  |
| Д.М. Мухаммадиев, Х.А. Ахмедов, И.О.Эргашев, Л.Ю.Жамолова. Аррали жин юқори брусини эгилишга ҳисоблаш.....                                                                                                                                       | 73  |
| В.М. Турдалиев, С.Р. Комилов, М.Г. Абдухалилова. Кинематический анализ цепной передачи с переменным межосевым расстоянием.....                                                                                                                   | 81  |
| Н.Б. Баратов. Таркибли-эркин стерженли қобикли шпиндел ҳаракатининг назарий-экспериментал тадқиқотлари.....                                                                                                                                      | 87  |
| П.В. Логинов. Қумли тупроқларни ўзгаривчан деформация модуллари ва уларни аниқлаш.....                                                                                                                                                           | 98  |
| Н.А. Акбаров, С.С. Хамидов. Таркибли қувурсимон стерженларда нозизиқли тўлқин жараёнларини сонли моделлаштириш.....                                                                                                                              | 108 |

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. Абдусаттаров, А.И. Исомиддинов, Н.Б. Рузиева. Упругопластический расчет тонкостенных стержней при переменном нагружении с учетом повреждаемости.....                                                                                                     | 3   |
| А.Т. Буриев. Нестационарное колебание грунтовой плотины с жестким основанием.....                                                                                                                                                                           | 17  |
| А. Абдурахимов, Д. Холиков. Исследование режимов работы химического реактора с неоднородным кипящим слоем.....                                                                                                                                              | 27  |
| Б.М. Мардонов. К определению параметров сил взаимодействия водонасыщенного грунта с трубопроводом при сдвиговых колебаниях.....                                                                                                                             | 32  |
| Х.С. Сагдиев, А.С. Ювмитов, З.Р. Тешабоев, В.А. Галиаскаров, Х.О.Шерниёзов, Б.Н.Мирзакабилов, З.Ж. Собиров. Оценка сейсмической безопасности зданий дошкольных образовательных учреждений города Ташкента и рекомендации по их дальнейшей эксплуатации..... | 39  |
| Б.М. Мардонов, Х.А. Байбулатов, М.Ж. Бердибаев. Расчет балочных автодорожных мостов на сейсмические нагрузки с учетом взаимодействия опор с грунтом.....                                                                                                    | 54  |
| Г.А. Бахадиров, Г.Н.Цой. Механическая обработка многослойных мокрых кожевенных полуфабрикатов.....                                                                                                                                                          | 64  |
| Д.М. Мухаммадиев, Х.А. Ахмедов, И.О.Эргашев, Л.Ю.Жамолова. Расчет верхнего бруса пильного джина на изгиб.....                                                                                                                                               | 73  |
| В.М. Турдалиев, С.Р. Комилов, М.Г. Абдухалилова. Кинематический анализ цепной передачи с переменным межосевым расстоянием.....                                                                                                                              | 81  |
| Н.Б. Баратов. Теоретико-экспериментальное исследование движения оболочкового шпинделя со структурно-свободным стержнем.....                                                                                                                                 | 87  |
| П.В. Логинов. Переменные модули деформации суглинков и их определение.....                                                                                                                                                                                  | 98  |
| Н.А. Акбаров, С.С. Хамидов. Численное моделирование нелинейных волновых процессов в составных трубчатых стержнях.....                                                                                                                                       | 108 |